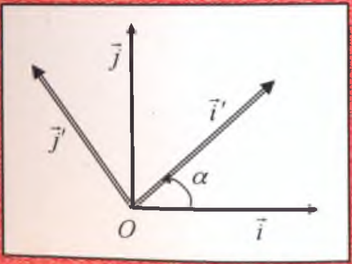
H.D.FƏTTAYEV

ANALİTİK HƏNDƏSƏ KURSU

I HİSSƏ

Vektorlar, müstəvi üzərində analitik həndəsə



ANALİTİK HƏNDƏSƏ KURSU
H.D.FƏTTAYEV

Analitik
həndəsə

Azərbaycan Respubl
Bakı Dövlət Universiteti

H.D.FƏTTAYEV

ANALİTİK HƏNDƏSƏ KURSU
I HİSSƏ

Vektorlar, müstəvi üzərində analitik həndəsə

(dərs vəsaiti)

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirinin 24.06.2009-cu il tarixli 793 saylı əmri ilə dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir.

Bakı-2009

Elmi redaktor: BDU-nun Cəbr və həndəsə kafedrasının müdiri,
dos.V.Ə.Qasımov

Rəy verənlər: BDU-nun Nəzəri mexanika və bütöv mühit mexanikası kafedrasının müdiri,
prof.R.Y.Əmənzadə

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi,
dos. N.Y.Əliyev

H.D.Fəttayev. Analitik həndəsə kursu. I hissə. Dərs vəsaiti. Bakı, 2009, 180 səh.

Dərs vəsaiti analitik həndəsə fənninin vektorlar və müstəvi üzərində analitik həndəsə bölmələrini əhatə etməklə, BDU-nun riyaziyyat və riyaziyyat müəllimliyi ixtisasları üzrə bakalavr pilləsinin əyani və qiyabi şöbələrində təhsil alan I kurs tələbələri üçün nəzərdə tutulmuşdur. Dərs vəsaitində nəzəri materiallarla yanaşı, məsələ həlli nümunələri verilmiş və sərbəst həll etmək üçün məsələlər təklif olunmuşdur. Dərs vəsaiti analitik həndəsə fənninin tədris olunduğu digər ali məktəb tələbələri və bu fənni sərbəst öyrənənlər üçün də faydalı ola bilər.

Dünyadan vaxtsız köçmüş atam Dövlət Əlirza oğlu Fəttayevin əziz xatirəsinə ithaf olunur

M ü ə l l i f

ÖN SÖZ

Təqdim olunan kitab Bakı Dövlət Universitetinin «riyaziyyat» və «riyaziyyat müəllimliyi» ixtisasları üzrə təhsil alan tələbələri üçün nəzərdə tutulur və «Analitik həndəsə» fənninin təsdiq olunmuş proqramının vektorlar və müstəvi üzərində analitik həndəsə bölmələrini əhatə edir.

2008-2009-cu tədris ilindən etibarən Bakı Dövlət Universitetinin bütün fakültələrində təlim prosesinin yeni-kreditli sistemine keçilməsi professlor-müəllim heyəti qarşısında bir sıra metodiki xarakterli vəzifələr qoymuşdur. Mühazirə mətnlərinin elektron versiyalarının hazırlanması, tələbələrin sərbəst işləri ilə bağlı köməkçi vəsaitlərin , nəzəri materialların çalışmalar həlli ilə uzlaşdırıldığı metodiki vəsaitlərin yazılması bu baxımdan vacib və zəruri məsələlərdəndir.

Vəsaitin yazılmasından əsas məqsəd proqramın ayrı-ayrı movzuları ilə tələbələri daha əhatəli tanış etməkdən ibarətdir. Mövzuların kifayət qədər geniş, aydın, izahlı, əyani və dolğun şərh olunması yeni materialların daha yaxşı qavranılması məqsədini daşıyır. Məşğələ dərslərinə tələbələrin hazırlaşmasını asanlaşdırmaq və bu işdə onlara yardımçı olmaq məqsədi ilə vəsaitə hər bir mövzuya aid xarakterik məsələlərin izahlı həlləri daxil edilmişdir. Bundan başqa, vəsaitdə tələbələrin sərbəst fəaliyyətləri üçün bir sıra çalışmalar təklif olunmuş, onların cavabları verilmişdir.

Vəsait beş fəsil və on doqquz paraqrafdan ibarətdir. Hər bir paraqraf, bu paraqrafa daxil olan yeni anlayışların şərhini digərlərindən fərqləndirmək məqsədilə ayrı-ayrı bəndlərə bölünmüşdür. Əvvəlki paraqraflarda verilən düsturlara və ya teoremlərə istinad olunarkən, bir qayda olaraq, fəslin, paraqrafın, bəndin, düsturun və ya teoremin sayı göstərilmişdir, məsələn, (bax, IV fəsil, § 15, bənd 3, (5) düsturu). Hər bir teoremin isbatının başa çatması ■ fiquru ilə nəzərə çatdırılmışdır.

Vəsaitin hazırlanması zamanı rus dilində olan dərslik, dərs vəsaitlərindən, məsələ kitablarından, eləcə də azərbaycan dilində yazılmış dərs vəsaitlərindən, metodik tövsiyələrdən istifadə olunmuşdur. Bu ədəbiyyatların siyahısı kitabın sonunda verilmişdir.

Kitabın müzakirəsində fəal iştirak etdiklərinə və dəyərli məsləhətlərinə görə BDU-nun Cəbr və həndəsə kafedrasının bütün əməkdaşlarına öz dərin təşəkkürümü bildirirəm.

Kitab haqqında rəy və təkliflərini bildirən oxuculara əvvəlcədən öz minnətdarlığımı bildirirəm.

Müəllif,
Bakı şəhəri,
2009-cu il

ELMİ REDAKTORDAN

Həndəsə, hesabla bərabər, riyaziyyatın təməllərindən biridir. İxtisasından asılı olmayaraq tədris olunan istənilən riyazi kurslarda istər riyaziyyatçı, istər fizik, istər mühəndis, hətta humanitar sahə olsada hər bir samballı kursda mütləq həndəsənin elementlərinə rast gəlinir. Riyaziyyatın inkişafı 17-ci əsrdən başlayaraq həndəsənim cəbrləşməsinə gətirmişdir. Nəticədə koordinatlar metodu yaranmışdır. Bu üsulla həndəsi obyektlər cəbri metodlarla öyrənilir. Analitik həndəsənin ilk yaradıcıları Pyer Ferma, Rene Dekart olmuşdur. Burada həmçinin Leybnis, Nyuton, Eyler, Laqranj və Monjun adlarını da çəkmək lazımdır. Bunlar analitik həndəsədən istifadə edərək fizikanm, mexanikanın, o cümlədən səma mexanikasınm bir çox məsələlərini o dövrdə həll etmişlər. Müasir dövrdə analitik həndəsə yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi riyazi tədris prosesinin əsas fənlərindən biridir.

Kitabda müstəvi üzərində analitik həndəsə kursunun elementləri öz əksini tapmışdır. Kitab 5 fəsildən ibarətdir. Müəllif birinci fəsildə, birbaşa vektor anlayışma müraciət edir və onlar üzərində əsas əməlləri təyin edir. Qeyd edək ki, müəllif, bu kitabda həndəsənin əsas anlayışlarından olan nöqtə, düz xətt və müstəvi haqqmda orta məktəbdəki təsəvvürlərə əsaslanır və onları hər hansı bir müəyyən ciddi aksiomatik sistemlə əsaslandırmır.

İkinci fəsil müstəvi üzərində koordinat metoduna həsr edilmişdir ki onlardanda, dekart və polyar koordinatlar şərh edilir.

Üçüncü fəsildə müəllif müstəvi üzərində verilən düz xətləri və onların qarşılıqlı vəziyyətlərini cəbri üsullarla öyrənilməsinin bəzi metodlarını verir.

Dördüncü fəsil əsas ikitərtibli xətlərə o cümlədən ellips, hiperbola və parabolaya və ikitərtibli xətlərin cəbri üsullarla təsnifatma həsr olunmuşdur.

Beşinci fəsil isə müstəvinin çevirmələrinə aiddir. Burada çevirmələrin müxtəlif növləri və onların sadə cəbri struktur təbiətinin əsas xassələri (qrup xarakterli) şərh edilmişdir.

Kitabda, baxılan bütün əsas mövzuların tələbələr tərəfindən dərindən mənimsənilməsi üçün kifayyət qədər məsələ və çalışmalar (onlardan bir çoxu həlli ilə) verilmişdir.

Bu kitabın tələbələrin analitik həndəsə fənninin öyrənilməsində faydalı olacağına ümüd edirəm.

I FƏSİL

VEKTORLAR

§ 1. Vektor anlayışı. Vektorların toplanması, vektorun ədədə vurulması

1. Uc nöqtələrinin nizamı nəzərə alınan parçaya *istiqamətlənmiş parça* deyilir. Tutaq ki, uc nöqtələri A və B nöqtələrində olan parça verilmişdir. A-birinci nöqtə, B isə ikinci nöqtə olduqda A nöqtəsinə bu istiqamətlənmiş parçanın *başlanğıcı*, B nöqtəsinə isə *sonu* deyilir; bu halda $\overline{AB}$ yazılışından istifadə olunur. Başlanğıcı və sonu üst-üstə düşən istiqamətlənmiş parçaya *sıfır istiqamətlənmiş parça* deyilir. Tərifə görə, ixtiyari A nöqtəsi üçün $\overline{AA}$ sıfır istiqamətlənmiş parçadır.

AB parçasının uzunluğu $\overline{AB}$ istiqamətlənmiş parçasının *uzunluğu* adlanır və $|\overline{AB}|$ kimi işarə olunur. Sıfır istiqamətlənmiş parçanın uzunluğunun sıfra bərabər olması nəzərdə tutulur.

Tutaq ki, A və B verilmiş iki nöqtədir. Onda $\overline{AB}$ və $\overline{BA}$ müxtəlif istiqamətlənmiş parçalardır. $\overline{AB}$ və $\overline{BA}$ parçalarından hər biri digərinə *əks* olan istiqamətlənmiş parça adlanır.

AB və CD şüaları eyni (əks) istiqamətli olduqda deyirlər ki, $\overline{AB}$ və $\overline{CD}$ *eyni* (*əks*) *istiqamətlənmiş* parçalardır. Sıfır istiqamətlənmiş parçanın istənilən istiqamətlənmiş parça ilə eyni istiqamətli olması qəbul edilir.

Eyni istiqamətlənmiş və uzunluqları bərabər olan $\overline{AB}$ və $\overline{CD}$ parçalarına *ekvipolent parçalar* deyilir. Bu halda $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD}$ yazılışından istifadə olunur. Asanlıqla yoxlanılır ki $\overline{AB}$ və $\overline{CD}$ istiqamətlənmiş parçaları yalnız və yalnız AD və BC parçalarının orta nöqtələri üst-üstə düşdükdə ekvipolent olurlar.

Qeyd edək ki, ekvipolentlik münasibəti aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1. ixtiyari istiqamətlənmiş $\overline{AB}$ parçası üçün $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{AB}$.

2. $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \overset{\omega}{=} \overline{AB}$.

3. $\left(\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD} \text{ və } \overline{CD} \overset{\omega}{=} \overline{EF}\right) \Rightarrow \overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{EF}$.

Beləliklə, ekvipolentlik münasibəti fəzanın bütün istiqamətlənmiş parçalar çoxluğunda ekvivalentlik münasibətidir. Fəzanın bütün istiqamətlənmiş parçalar çoxluğunu W ilə işarə edək. $\overset{\omega}{=}$ ekvipolentlik münasibətinin hər bir ekvivalentlik sinifinə *vektor* (və ya *sərbəst vektor*) deyilir. Bu tərifə əsasən, vektor- $V = W / \overset{\omega}{=}$ faktor-çoxluğunun elementidir. Vektorlar üstünə ox işarəsi qoyulan hərflərlə işarə olunurlar: $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$.

Beləliklə, vektor-elə istiqamətlənmiş parçalar çoxluğudur ki, onlardan ixtiyari ikisi ekvipolent parçalardır. Bu çoxluğun ən azı bir parçası sıfır istiqamətlənmiş parça olduqda vektor *sıfır vektor* adlanır və $\vec{0}$ kimi işarə olunur.

Tutaq ki, $\vec{a}$ – verilmiş vektordur, yəni $\overset{\omega}{=}$ münasibətinin ekvivalentlik sinfidir. $\overline{AB} \in \vec{a}$ olduqda $\overline{AB}$ bütün ekvivalentlik sinfini, yəni $\vec{a}$ vektorunu təmsil edir. Bu halda $\vec{a}$ vektoru $\overline{AB}$ kimi işarə olunur. $\vec{a} = \vec{b}$ yazılışı göstərir ki, $\vec{a}$ çoxluğu $\vec{b}$ çoxluğu ilə üst-üstə düşür, yəni $\vec{a}$ və $\vec{b}$ müxtəlif cür işarələnmiş eyni vektordur.

Fəzanın ixtiyari $\vec{a}$ vektorunu və məyyən O nöqtəsini götürək. İsbat edək ki, $\overline{OM} = \vec{a}$ şərtini ödəyən bir və yalnız bir M nöqtəsi vardır. Doğrudan da, fərz edək ki, $\overline{AB} \in \vec{a}$. OB parçasının C orta nöqtəsinə baxaq və C nöqtəsinə nəzərən A nöqtəsinə simmetrik olan M nöqtəsini götürək. İki istiqamətlənmiş parçanın ekvipolentlik əlamətinə əsasən $\overline{OM} \overset{\omega}{=} \overline{AB}$, ona görə də $\overline{OM} = \vec{a}$. İndi isə göstərək ki, M - $\overline{OM} = \vec{a}$ şərtini ödəyən yeganə nöqtədir. Tutaq ki, $\overline{OM'} = \vec{a}$. Onda $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$. Buradan istiqamətlənmiş parçaların ekvipolentlik əlamətinə əsasən alırıq:

$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{MM'} \Rightarrow \left|\overline{OO}\right| = \left|\overline{MM'}\right| \Rightarrow 0 = \left|\overline{MM'}\right|$, yəni M və M' nöqtələri üst-üstə düşürlər. M nöqtəsinin qurulmasını O nöqtəsindən $\vec{a}$ *vektorunun ayrılması* adlandırırlar.

$\vec{a}$ vektorunu təmsil edən ixtiyari istiqamətlənmiş parça l düz xəttinə paralel olduqda və ya onun üzərində yerləşdikdə deyirlər ki, $\vec{a}$ vektoru *l düz xəttinə paraleldir*. Sıfır vektorun istənilən düz xəttə paralel olması qəbul edilir.

Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarınm paralel olduğu düz xətt vardırsa, bu halda deyirlər ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları *kollineardırlar*. Aydındır ki, əgər iki vektordan heç olmazsa biri sıfır vektordursa, onda bu vektorlar kollineardırlar. $\vec{a}\|\vec{b}$ yazılışı göstərir ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ kollinear vektorlardır.

Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$-kollinear vektorlardır və $\overline{AB} \in \vec{a}, \overline{CD} \in \vec{b}$. $\overline{AB}$ və $\overline{CD}$ eyni istiqamətlənmiş parçalar olduqda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ eyni istiqamətli, əks istiqamətlənmiş parçalar olduqda isə əks istiqamətli vektorlar adlanır. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ yazılışı $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının eyni istiqamətli olmasını, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ yazılışı isə bu vektorların əks istiqamətli olmasını ifadə edir.

İxtiyari $\vec{a}$ vektoruna baxaq və hər hansı A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ vektorunu ayıraq. $\overrightarrow{BA}$ vektoru $\vec{a}$ vektoruna *əks* olan vektor adlanır və $-\vec{a}$ kimi işarə olunur. $\overrightarrow{BA}$ vektoruna əks olan vektor $\overrightarrow{AB}$ vektoru olduğundan, $-(-\vec{a}) = \vec{a}$. Sıfır vektora əks olan vektor sıfır vektorun özüdür.

Vektorun uzunluğu dedikdə onu təmsil edən hər hansı istiqamətlənmiş parçanın uzunluğu başa düşülür. Sıfır vektorun uzunluğu sıfra bərabərdir. $\vec{a}$ vektorunun uzunluğu $|\vec{a}|$ kimi işarə olunur. Uzunluğu vahidə bərabər olan vektora *vahid vektor* deyilir.

2. Vektorlar cəbrində vektorların toplanması əməli mühüm rol oynayır. İxtiyari $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını götürək. Hər hansı A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ vektorunu, sonra isə B nöqtəsindən $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ vektorunu ayıraq. $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ vektoru *$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorların cəmi* adlanır və belə işarə olunur: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Vektorların toplanmasının yuxarıda göstərilən qaydası *üçbucaq qaydası* adlanır. Bu qaydanı belə ifadə etmək olar: *ixtiyari A, B və C nöqtələri üçün*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \tag{1}$$

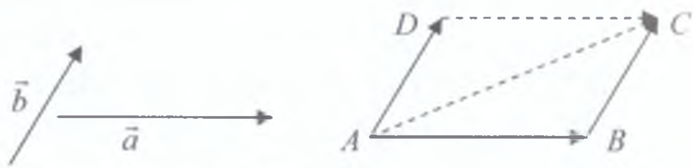
bərabərliyi doğrudur.

Üçbucaq qaydasını A, B, A nöqtələrinə tətbiq etməklə alırıq: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$. Analoji olaraq müəyyən edirik ki, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$. Beləliklə, ixtiyari $\vec{a}$ vektoru üçün:

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}, \tag{2}$$

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a} \text{ və } \vec{0}+\vec{a}=\vec{a}. \tag{3}$$

Kollinear olmayan vektorların toplanması üçün digər qaydadan-*paraleloqram qaydasından* istifadə oluna bilər. Şəkil 1-də $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının $\vec{c}$ cəminin bu qayda ilə qurulması göstərilmişdir.



Şəkil 1

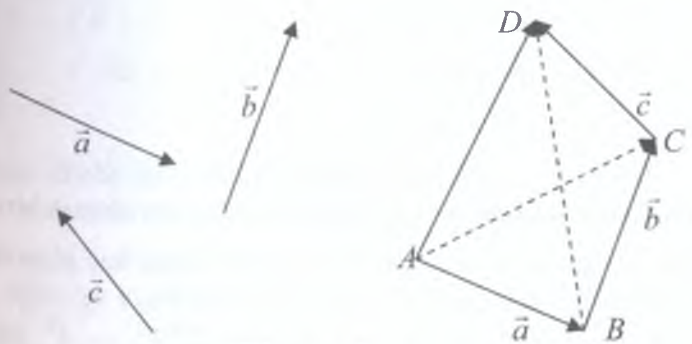
Teorem 1. *İxtiyari $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:*

1^0. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (yerdəyişmə və ya kommutativlik xassəsi).

2^0. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (qruplaşdırma və ya assosiativlik xassəsi).

İsbatı. 1^0. Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ - ixtiyari vektorlardır. Hər hansı A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ vektorlarını, sonra isə B nöqtəsindən $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ vektorunu ayıraq (şək.1). Qurmaya əsasən, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, ona görə də $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, yəni $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$. Üçbucaq qaydasına görə, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ və $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$. Bu isə o deməkdir ki, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}, \vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Beləliklə, $\vec{a}+\vec{b}$ və $\vec{b}+\vec{c}$ eyni vektordur.

2^0. Tutaq ki, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – ixtiyari vektorlardır. Hər hansı A nöqtəsini götürək və ardıcıl olaraq, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b}, \overrightarrow{CD}=\vec{c}$ vektorlarını ayıraq (şək.2). Üçbucaq qaydasına görə, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$. Bu isə o deməkdir ki, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AD}$. Digər tərəfdən, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, ona görə də $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AD}$. Beləliklə, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ və $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ eyni vektordur. ■



$$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

Şəkil 2

$\vec{p} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ vektoru $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının cəmi qəbul olunur. Teorem 1-ə əsasən, $\vec{p} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Analoji qayda ilə ixtiyari $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n (n > 3)$ vektorlarının cəmi təyin oluna bilər.

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ *vektorlarının fərqi*

$$\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$$

bərabərliyini ödəyən $\vec{x}$ vektoruna deyilir. Göstərmək olur ki, ixtiyari iki vektorun fərqi vardır və birqiymətli təyin olunur.

3. $\vec{a}$ *vektorunun* λ *həqiqi ədədinə hasili* aşağıdakı şərtləri ödəyən $\vec{p}$ vektoruna deyilir:

a) $|\vec{p}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, burada $|\lambda| - \lambda$ ədədinin mütləq qiymətidir.

b) $\lambda \geq 0$ olduqda $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{a}$ və $\lambda < 0$ olduqda $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

$\vec{p}$ vektorunu $\lambda\vec{a}$ kimi işarə edirlər.

a) şərtindən alınır ki, yalnız və yalnız $\lambda = 0$ və ya $\vec{a} = \vec{0}$ olduqda $\vec{p} = \vec{0}$. Beləliklə, $\lambda\vec{0} = \vec{0}$, $\quad 0\vec{a} = \vec{0}$.

Teorem 2. *İxtiyari* λ, μ *ədədləri və* $\vec{a}, \vec{b}$ *vektorları üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:*

1^0. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

2^0. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.

3^0. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

4^0. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

İsbatı. 1^0 xassəsinin doğruluğu vektorun ədədə hasilinin tərifindən bilavasitə alınır. λ, μ ədədlərindən heç olmasa biri sıfra bərabər olduqda və ya $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından heç olmasa biri sıfır vektor olduqda digər xassələrin də doğruluğu aşkardır. Ona görə də $\lambda \neq 0, \mu \neq 0, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ halında $2^0, 3^0$ və 4^0 xassələrinin doğruluğunu əsaslandırmaq yetərlidir.

2^0. Tutaq ki, $\vec{p} = \lambda(\mu\vec{a}), \vec{q} = (\lambda\mu)\vec{a}$. Vektorun ədədə hasilinin tərifinə görə, $|\vec{p}| = |\lambda||\mu\vec{a}| = |\lambda||\mu||\vec{a}|$, $|\vec{q}| = |\lambda\mu||\vec{a}| = |\lambda||\mu||\vec{a}|$. Buradan alınır ki, $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. Göstərək ki, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. $\lambda\mu > 0$ və $\lambda\mu < 0$ mümkün halları vardır. Birinci hala baxaq. $\vec{p} = \lambda(\mu\vec{a})$ olduğundan, həmçinin λ və μ eyni işarəli ədədlər olduqlarından $\vec{p}$ və $\vec{a}$ vektorları eyni istiqamətlidirlər. Lakin $\vec{q} = (\lambda\mu)\vec{a}$ və $\vec{a}$ vektorlarının da istiqamətləri eynidir, beləliklə, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. Analoji qayda ilə $\lambda\mu < 0$ halında da müəyyən edirik ki, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. Buradan $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ bərabərliyinin əsasən, $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ olması alınır.

3^0. Hər hansı A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ vektorunu, sonra isə B nöqtəsindən $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ vektorunu ayıraq. Üçbucaq qaydasına əsasən, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, yəni $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Əmsalı λ ədədi olan və mərkəzi AB, BC və AC düz xəttlərinə oid olmayan müəyyən O nöqtəsində yerləşən homotetiyaya baxaq. Tutaq ki, A', B' və C' - A, B və C nöqtələrinin obrazlarıdır. Onda $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = \lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{AC}$ və ya $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{B'C'} = \lambda\vec{b}$, $\overrightarrow{A'C'} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$. Digər tərəfdən, üçbucaq qaydasına əsasən, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$, yəni $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

4^0. İki mümkün hala baxmaq lazımdır: a) $\lambda\mu > 0$ və b) $\lambda\mu < 0$.

a) $\lambda\mu > 0$. Müəyyən A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{a}$ vektorunu, sonra isə B nöqtəsindən $\overrightarrow{BC} = \mu\vec{a}$ vektorunu ayıraq. Onda $AB = |\lambda||\vec{a}|, BC = |\mu||\vec{a}|$. $\lambda\mu > 0$ olduğuna görə, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, yəni B nöqtəsi A və C nöqtələri arasında yerləşir. Beləliklə, $AC = AB + BC$ və ya $AC = |\lambda||\vec{a}| + |\mu||\vec{a}|$. Lakin λ və μ eyni işarəli ədədlərdir, ona görə də $|\lambda| + |\mu| = |\lambda + \mu|$. Bu isə göstərir ki,

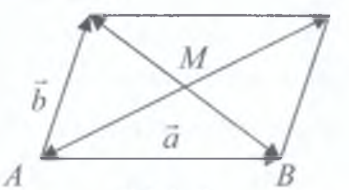
$$AC = |\lambda + \mu||\vec{a}|. \quad (4)$$

$\lambda > 0, \mu > 0$ olduqda $\overrightarrow{AC}$ və $\vec{a}$ vektorları eyni istiqamətli, $\lambda < 0, \mu < 0$, yəni $\lambda + \mu < 0$ olduqda isə əks istiqamətli vektorlardır. Ona görə də (4) bərabərliyinə əsasən alarıq: $\overrightarrow{AC} = (\lambda + \mu)\vec{a}$. Digər tərəfdən, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Beləliklə, $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

$\lambda\mu < 0$ halında da 4^0 bərabərliyinin doğruluğu analoji qayda ilə əsaslandırılır.■

Məsələ 1. $ABCD$ paraleloqrammda $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ və $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ işarə olunmuşdur. M – bu paraleloqramın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi olduqda $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ və $\overrightarrow{MD}$ vektorlarını $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları ilə ifadə edin.

Həlli.

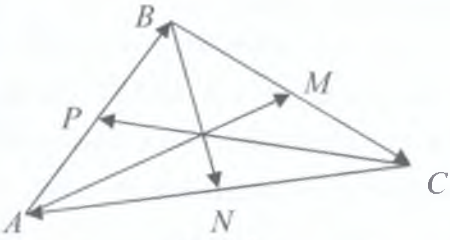


Şəkil 3

Aşkardır ki, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Ona görə də üçbucaq qaydasına əsasən, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Paraleloqramm diaqonalları kəsişmə nöqtəsində yarıya bölündüklərindən, $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ olar. $\overrightarrow{MA}$ vektoru $\overrightarrow{MC}$ vektorunun əks vektoru olduğundan, $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Şəkil 3-dən göründüyü kimi, $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$. Ona görə də, $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$, $\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

Məsələ 2. $\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{a}$ və $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ vektorları üçbucağın tərəfləridir. Üçbucağın $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$ və $\overrightarrow{CP}$ medianları ilə üst-üstə düşən vektorları $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları ilə ifadə edin.

Həlli.



Şəkil 4

Hər şeydən əvvəl qeyd edək ki, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ olduğundan ixtiyari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarının üçbucağın tərəfləri ilə üst-üsə düşməsi üçün $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ bərabərliyi ödənilməlidir. Şəkil 4-dən göründüyü kimi,

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} \qquad \text{və ya}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right)$$

Eyni mülahizələrə əsasən müəyyən olunur ki,

$\overrightarrow{BN} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ və ya $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{c}\right)$; $\overrightarrow{CP} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ və ya $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları hansı şərti ödəməlidirlər ki, $\vec{a} + \vec{b}$ vektoru onlar arasındakı bucağı yarıya bölsün?

Cavab: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ olmalıdır.

2. $ABCD$ dördbucaqlısının paraleloqram olması üçün zəruri və kafi şərti vektorial şəkildə ifadə edin.

Cavab: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ və ya $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ olmalıdır.

3. $ABCDEF$ düzgün altıbucaqlıdır, O nöqtəsi isə onun mərkəzidir. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ qəbul edərək, $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{EC}$ vektorlarını $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları ilə ifadə edin.

Cavab: $\overrightarrow{OC}=\vec{b}-\vec{a}, \overrightarrow{OD}=-\vec{a}, \overrightarrow{EC}=2\vec{b}-\vec{a}$.

4. $ABCD$ rombunda $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ və $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ diaqonalları verilmişdir. Rombun tərəfləri ilə üst-üstə düşən $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ və $\overrightarrow{DA}$ vektorlarını $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları ilə ifadə edin.

Cavab: $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}), \overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}), \overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$,

$\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

§ 2. Vektorların xətti asılılığı

1. Əvvəlcə vektorların kollinearlığına dair aşağıdakı teoremi isbat edək:

Teorem 1. *Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleardırlarsa və $\vec{a}\neq\vec{0}$ şərti ödənilirsə, onda elə yeganə α ədədi vardır ki,*

$$\vec{b}=\alpha\vec{a}. \tag{1}$$

İsbatı. İlk növbədə (1) bərabərliyini ödəyən α ədədinin varlığını əsaslandıraq. $\vec{a}\|\vec{b}$ olduğundan, ya $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, ya da $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. Birinci halda $\alpha=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, ikinci halda isə $\alpha=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ qəbul edək. Vektorun ədədə vurulması əməlinin tərifinə əsasən, hər iki halda (1) bərabərliyini alırıq.

İndi isə isbat edək ki, (1) şərtini ödəyən α ədədi birqiymətli təyin olunur. Fərz edək ki, α_1 elə bir həqiqi ədəddir ki, $\vec{b}=\alpha_1\vec{a}$. Bu bərabərlıkdən və (1) bərabərdiyindən alınır ki, $\alpha\vec{a}=\alpha_1\vec{a}$ və ya $(\alpha-\alpha_1)\vec{a}=\vec{0}$. $\vec{a}\neq\vec{0}$ olduğundan, $\alpha-\alpha_1=0$ və ya $\alpha=\alpha_1$. ■

$\vec{a}$ vektoru σ müstəvisi üzərində yerləşən müəyyən düz xəttə paralel olduqda deyirlər ki, *$\vec{a}$ vektoru σ müstəvisinə paraleldir*. Aşkardır ki, σ müstəvisinə paralel olan $\vec{a}$ vektoru σ müstəvisinə paralel olan istənilən müstəviyə də paraleldir.

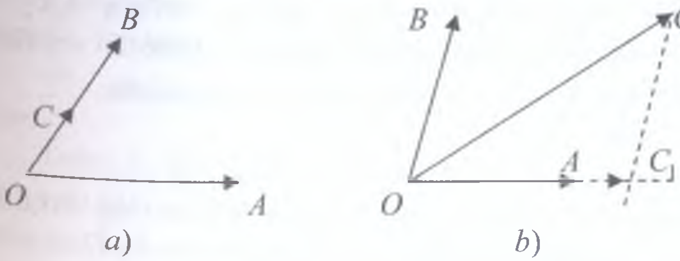
Əgər $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının paralel olduqları müstəvi vardırsa, bu halda deyirlər ki, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorları *komplanardırlar*. Qeyd edək ki, $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarından heç olmasa biri sıfır vektor olduqda bu vektorlar komplanardırlar. Doğrudan da, müəyyənlik üçün, məsələn, $\vec{c}=\vec{0}$ olduğunu fərz edək. Fəzanın hər hansı O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ vektorlarını ayıraq. O,A və B nöqtələrindən $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarına paralel olan müstəvi keçdiyindən bu vektorlar komplanardırlar.

Komplanar vektorlara dair teoremi isbat edək:

Teorem 2. *Əgər $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanardırsa və $\vec{a},\vec{b}$ -kollinear olmayan vektorlardırsa, onda elə yeganə α və β ədədləri vardır ki,*

$$\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}. \tag{2}$$

İsbatı. Əvvəlcə (2) bərabərliyini ödəyən α və β əgədlərinin varlığını isbat edək. Müəyyən O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ vektorlarını ayıraq. Bu vektorlar komplanar olduqlarından O,A,B,C nöqtələri bir müstəvi üzərində yerləşirlər, eyni zamanda O,A,B nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşmirlər ($\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ kollinear olmayan vektorlardır).



Şəkil 5

C nöqtəsi OB düz xətti üzərində yerləşdikdə (şək.5, a), $\overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ vektorları kollinear olurlar. Bu halda teorem 1-ə əsasən $\vec{c}=\beta\vec{b}$ və ya $\vec{c}=0\cdot\vec{a}+\beta\vec{b}$ şərtini ödəyən β ədədi vardır, yəni (2) bərabərliyi ödənilir. C nöqtəsinin OB düz xətti üzərində yerləşmədiyi hala baxaq (şək. 5, b). OB düz xəttinə CC_1 paralel düz xəttini keçirək, burada $C_1 - OA$ düz xəttinin nöqtəsidir. Üçbucaq qaydasına əsasən, $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC_1}$. Lakin $\overrightarrow{OC_1}\parallel\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{C_1C}\parallel\overrightarrow{OB}$, ona görə də $\overrightarrow{OC_1}=\alpha\vec{a}, \overrightarrow{C_1C}=\beta\vec{b}$ bərabərliklərini ödəyən α və β ədədləri vardır. Beləliklə, $\overrightarrow{OC}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, yəni (2) bərabərliyi ödənilir.

İndi isə (2) bərabərliyini ödəyən α və β ədədlərinin birqiymətli təyin olunduğunu isbat edək. Tutaq ki, α_1 və β_1 elə ədədlərdirlər ki, $\vec{c}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}$. Bu bərabərlikdən və (2) bərabərliyindən alarıq: $(\alpha-\alpha_1)\vec{a}+(\beta-\beta_1)\vec{b}=\vec{0}$. Aşkardır ki, $\alpha-\alpha_1=0$, $\beta-\beta_1=0$. Doğrudan da, məsələn, $\alpha-\alpha_1\neq 0$ olduğunu fərz etsək, sonuncu vektor bərabərliyindən alarıq: $\vec{a}=\dfrac{\beta_1-\beta}{\alpha-\alpha_1}\vec{b}$, bu isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear olmadığına görə mümkün deyil.■

2. Tutaq ki,

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \tag{3}$$

vektorlar sistemi və n sayda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ həqiqi ədədləri verilmişdir. $\vec{b}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$ vektoru verilmiş $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarının *xətti kombinasiyası* adlanır. Həmçinin deyirlər ki, $\vec{b}$ vektoru $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorları ilə *xətti ifadə olunur*.

Əgər

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0} \tag{4}$$

bərabərliyini ödəyən və heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ədədləri vardırsa, o halda deyirlər ki, (3) vektorlar sistemi *xətti asılıdır*. (4) bərabərliyi yalnız $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ olduqda ödənildiyi halda isə $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ *xətti asılı olmayan vektorlar sistemi* adlanır.

$n = 1$ halında bir vektordan ibarət sistem alınır. Aşkardır ki, belə sistem yalnız sistemin vektoru sıfır vektor olduqda xətti asılıdır.

Xətti asılı olan vektorlar sisteminin bəzi xassələrini nəzərdən keçirək.

1^0. *$n > 1$ halında* (3) *vektorlar sisteminin xətti asılı olması üçün zəruri və kafi şərt bu vektorlardan heç olmasa birinin sistemin qalan vektorlarının xətti kombinasiyası olmasıdır.*

Tutaq ki, (3) vektorlar sistemi xətti asılıdır. Bu o deməkdir ki, (4) bərabərliyi ödənilir və $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ədədlərindən heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Müəyyənlik üçün $\alpha_k \neq 0$ ($k = 1, 2, ..., n$ ədədlərindən biridir) olduğunu fərz edək. (4) bərabərliyini

$$\vec{a}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\vec{a}_2 - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\vec{a}_n$$

şəklində yazaq. Buradan görünür ki, $\vec{a}_k$ vektoru (3) sisteminin qalan vektorlarının xətti kombinasiyasıdır.

Tərsinə, tutaq ki. (3) sistemində $\vec{a}_k$ vektoru qalan vektorların xətti kombinasiyasıdır:

$$\vec{a}_k = \beta_1\vec{a}_1 + \cdots + \beta_{k-1}\vec{a}_{k-1} + \beta_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \cdots + \beta_n\vec{a}_n.$$

Bu bərabərliyi aşağıdakı kimi yazaq:

$$\beta_1\vec{a}_1 + \cdots + \beta_{k-1}\vec{a}_{k-1} + (-1)\vec{a}_k + \beta_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \cdots + \beta_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Sonuncu bərabərlik (3) vektorlar sisteminin xətti asılı olduğunu göstərir ($\vec{a}_k$ vektorunun əmsalı sıfırdan fərqlidir). ■

2^0. *Alt sistemi xətti asılı olan vektorlar sistemi xətti asılıdır.*

Tutaq ki, (3) vektorlar sistemi verilmişdir və $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_l$ $(l < n)$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. Deməli, heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olan elə $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$ ədədləri vardır ki,

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_l\vec{a}_l=\vec{0}.$$

Bu bərabərliyi aşağıdakı kimi də yaza bilərik:

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_l\vec{a}_l+0\vec{a}_{l+1}+\cdots 0\vec{a}_n=\vec{0}.$$

Beləliklə , (3) vektorlar sistemi də xətti asılıdır. ■

3^0. *Xətti asılı olmayan vektorlar sistemində sıfır vektor yoxdur.*

4^0. *Xətti asılı olmayan vektorlar sisteminin istənilən alt sistemi xətti asılı deyil.*

3^0 xassəsinin doğruluğu 2^0 xassəsindən bilavasitə alınır, 4^0 xassəsinin doğruluğu isə əksini fərz etmə ilə asanlıqla əsaslandırılır.

3. Vektorların xətti asılılığının həndəsi mahiyyətini izah edən teoremləri nəzərdən keçirək.

Teorem 3. $\vec{a},\vec{b}$ *vektorlar sistemi yalnız və yalnız bu vektorlar kollinear olduqda xətti asılıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. 1^0 xassəsinə görə bu vektorlardan heç olmazsa biri digəri ilə xətti ifadə olunur. Müəyyənlik üçün $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ olduğunu qəbul edək. Buradan görünür ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleneardırlar.

Tərsinə, tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırlar. $\vec{a}=\vec{0}$ olduqda 3^0 xassəsinə görə $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. $\vec{a}\neq\vec{0}$ olduqda isə teorem 1-ə əsasən, $\vec{b}=\alpha\vec{a}$. Buradan $\alpha\vec{a}+(-1)\vec{b}=\vec{0}$ bərabərliyi alınır, yəni $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. ■

Teorem 4. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *vektorlar sistemi yalnız və yalnız bu vektorlar komplanar olduqda xətti asılıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0},$$

burada α,β,γ əmsallarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidir. Göstərək ki, $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanardırlar. α , β və ya

γ əmsallarından heç olmasa biri sıfra bərabər olduqda hökmün doğruluğu aşkardır. Doğrudan da, məsələn, $\gamma = 0$ olursa, onda $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ və teorem 3-ə görə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırlar. Bu isə $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının komplanar olması deməkdir. $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ halına baxaq.

Müəyyən O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$ vektorunu, sonra isə A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB} = \beta\vec{b}$ vektorunu ayıraq. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ olduğundan, $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Digər tərəfdən, $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = -\gamma\vec{c}$, ona görə də $\overrightarrow{OB} = -\gamma\vec{c}$. O, A və B nöqtələrindən müəyyən σ müstəvisi keçir. $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ olduğundan, $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \beta\vec{b}$ və $\overrightarrow{OB} = -\gamma\vec{c}$ bərabərliklərindən alınır ki, $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları σ müstəvisinə paraleldirlər və ona görə də komplanardırlar.

Tərsinə, tutaq ki, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorları komplanardırlar. Əgər $\vec{a} \| \vec{b}$ olarsa, onda teorem 3-ə əsasən, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları xətti asılıdırlar və 2^0 xassəsinə görə $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear olmadıqda isə teorem 2-yə əsasən, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Buradan 1^0 xassəsinə əsasən $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sisteminin xətti asılı olması alınır ■

Məsələ 1. $\vec{p}_1$ və $\vec{p}_2$ istənilən vektorlar olduqda $\vec{a} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \vec{b} = \vec{p}_1 - 2\vec{p}_2, \vec{c} = -\vec{p}_1 - 4\vec{p}_2$ vektorlarının xətti asılı olduğunu göstərin.

Həlli. $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının xətti asılı olması üçün eyni vaxtda sıfra bərabər olmayan α, β, γ ədədləri üçün

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \tag{5}$$

bərabərliyi ödənilməlidir. $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının $\vec{p}_1$ və $\vec{p}_2$ vektorları üzrə ayrılışlarından $\vec{p}_1$ və $\vec{p}_2$ vektorlarını yox edək:

$$\left.\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=3\vec{p}_2,\\ \vec{a}+\vec{c}&=-3\vec{p}_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}.$$

Beləliklə, (5) bərabərliyi $\alpha=2, \beta=-1, \gamma=1$ əmsalları ilə ödənildiyindən $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları xətti asılıdırlar.

Məsələ 2. Komplanar olmayan $\vec{l},\vec{m},\vec{n}$ vektorları üzrə $\vec{p}$ və $\vec{q}$ vektorlarının ayrılışları verilmişdir:

$$\vec{p}=\alpha_1\vec{l}+\alpha_2\vec{m}+\alpha_3\vec{n},$$
$$\vec{q}=\beta_1\vec{l}+\beta_2\vec{m}+\beta_3\vec{n}.$$

$\vec{p}$ və $\vec{q}$ vektorlarının kollinear olduqlarını bilərək, onların ayrılışlarındakı əmsallar arasındakı asılılığı müəyyən edin.

Həlli. $\vec{p}$ və $\vec{q}$ vektorlarının kollinear olması üçün $\vec{p}=\lambda\vec{q}$ $(\lambda\neq 0)$ bərabərliyi ödənilməlidir. Bu bərabərlikdə verilmiş ayrılışları nəzərə alaq:

$$\alpha_1\vec{l}+\alpha_2\vec{m}+\alpha_3\vec{n}=\lambda\left(\beta_1\vec{l}+\beta_2\vec{m}+\beta_3\vec{n}\right)$$

və ya

$$(\alpha_1-\lambda\beta_1)\vec{l}+(\alpha_2-\lambda\beta_2)\vec{m}+(\alpha_3-\lambda\beta_3)\vec{n}=\vec{0}. \qquad (6)$$

Şərtə görə $\vec{l},\vec{m},\vec{n}$ komplanar olmayan vektorlardır. Bu isə onu göstərir ki, (6) bərabərliyindəki ayrılış əmsalları sıfra bərabər olmalıdır:

$$\alpha_1-\lambda\beta_1=0, \alpha_2-\lambda\beta_2=0, \alpha_3-\lambda\beta_3=0$$

və ya

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\alpha_3}{\beta_3}=\lambda.$$

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. $\vec{m}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}, \vec{n}=\vec{b}+\dfrac{\vec{c}}{2}, \vec{p}=\vec{a}+\vec{b}, \vec{q}=\vec{b}-\vec{c}$ vektorları arasındakı xətti asılılığı tapın.

Cavab: $3\vec{m}+2\vec{n}-3\vec{p}+4\vec{q}$.

2. $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ vektorunu komplanar olmayan $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}$ və $\vec{p}=2\vec{b}+3\vec{c}$ vektorları üzrə ayırın.

Cavab: $\vec{s}=\frac{2}{5}\vec{m}+\frac{3}{5}\vec{n}+\frac{3}{5}\vec{p}$.

3. $\vec{l},\vec{m},\vec{n}$ vektorlarının komplanar olmayan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorları üzrə ayrılışları verilmişdir:

$$\vec{l}=\vec{c},\vec{m}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c},\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}.$$

$\vec{l},\vec{m},\vec{n}$ vektorlarının xətti asılı olduğunu göstərin və onlar arasındakı xətti asılılığı tapın.

Cavab: $2\vec{l}+\vec{m}-\vec{n}=\vec{0}$.

4. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ verilmiş vektorlar olduqda $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ vektorlarını

$$\begin{cases}\vec{x}+2\vec{y}=2\vec{a},\\ \vec{x}-\vec{y}=2\vec{b}\end{cases}$$

sistemindən təyin edin.

Cavab: $\vec{x}=\frac{2}{3}(\vec{a}+2\vec{b}),\vec{y}=\frac{2}{3}(\vec{a}-\vec{b})$

§ 3. Vektor fəza. Vektorun koordinatları

1. Əvvəlcə vektorun komplanar olmayan üç vektor üzrə ayrılışına dair teoremi isbat edək.

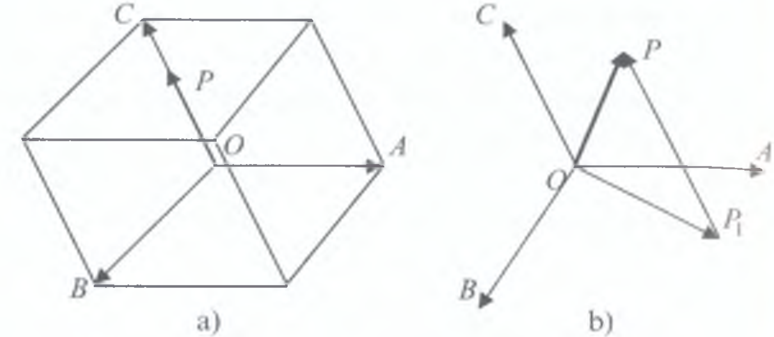
Teorem 1. *Əgər $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ komplanar olmayan vektorlardırsa, onda ixtiyari $\vec{p}$ vektoru üçün elə yeganə α,β və γ ədədləri vardır ki,*

$$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}. \qquad (1)$$

İsbatı. İlk növbədə (1) bərabərliyini ödəyən α,β və γ ədədlərinin varlığını isbat edək. Fəzanın müəyyən O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c},\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ vektorlarını ayıraq. $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanar olmadıqlarından, O,A,B və C nöqtələri bir müstəvi üzərində yerləşmirlər (şək.6).

P nöqtəsi OC düz xətti üzərində yerləşdikdə (şək.6, a) $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ və $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ vektorları kollinear olurlar və ona görə də vektorların kollinearlığına dair teoremə əsasən, $\vec{p}=\gamma\vec{c}$ və ya

$\vec{p} = 0\vec{a} + 0\vec{b} + \gamma\vec{c}$, yəni (1) bərabərliyi ödənilir. P nöqtəsinin OC düz xətti üzərində yerləşmədiyi hala baxaq. P nöqtəsindən OC



Şəkil 6

düz xəttinə paralel PP_1 düz xəttini keçirək, burada P_1 – bu düz xəttin OAB müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsidir (şək. 6, b). $\vec{a}, \vec{b}$ və $\overrightarrow{OP_1}$ vektorları komplanar olduqlarından, komplanar vektorlara dair teoremə əsasən elə α və β ədədləri vardır ki, $\overrightarrow{OP_1} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Digər tərəfdən, $\overrightarrow{P_1P}$ və $\vec{c}$ vektorları kollineardırlar, ona görə də elə γ ədədi vardır ki, $\overrightarrow{P_1P} = \gamma\vec{c}$. Üçbucaq qaydasına əsasən, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P}$, ona görə də $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

İndi isə isbat edək ki, (1) bərabərliyini ödəyən α, β və γ ədədləri birqiymətli təyin olunurlar. Fərz edək ki, α_1, β_1 və γ_1 elə ədədlərdir ki, $\vec{p} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$. Bu ayrılışdan və (1) bərabərliyindən alarıq: $(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} + (\gamma - \gamma_1)\vec{c} = \vec{0}$. $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektor-ları komplanar olmadıqlarından, § 2-dəki teorem 4-ə əsasən xətti asılı olmayan vektorlardır, ona görə də $\alpha - \alpha_1 = 0, \beta - \beta_1 = 0, \gamma - \gamma_1 = 0$ və ya $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$. ■

Nəticə. *Fəzada üçdən artıq vektordan ibarət olan ixtiyari sistem xətti asılıdır.*

Nəticənin doğruluğunu isbat etmək üçün § 2-dəki xassə 2^0-ni nəzərə almaqla dörd vektordan ibarət

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d} \qquad (2)$$

sisteminə baxmaq yetərlidir. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorları komplanar olduqda § 2-dəki teorem 4-ə əsasən xətti asılı olurlar. Bu halda vektorların xətti asılılığının 4^0 xassəsinə görə (2) sistemi də xətti asılı olur. $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanar olmadıqda isə teorem 1-ə əsasən $\vec{d}$ vektoru $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları ilə xətti ifadə olunur. Bu halda isə § 2-dəki xassə 1^0 – ə əsasən (2) sisteminin xətti asılı olması alınır. ■

2. Sərbəst vektorların $V = W/\overset{\omega}{=}$ çoxluğuna *üç ölçülü vektor fəza* deyilir. Vektor fəzanın *bazisi* dedikdə müəyyən nizamla verilmiş və aşağıdakı şərtləri ödəyən vektorlar sistemi başa düşülür:

a) sistem xətti asılı deyil;

b) fəzanın istənilən vektoru verilmiş sistemin vektorlarının xətti kombinasiyasıdır.

Bazisin vektorlarının sayı vektor fəzanın *ölçüsü* adlanır. Asanlıqla göstərmək olur ki, *müəyyən nizamla götürülən və komplanar olmayan üç vektordan ibarət istənilən sistem vektor fəzanın bazisidir.* Doğrudan da, fərz edək ki, $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ -komplanar olmayan vektorlardır. § 2-dəki teorem 4-ə əsasən bu sistem xətti asılı deyil və teorem 1-ə görə vektor fəzanm ixtiyari vektoru $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ vektorları ilə xətti ifadə olunur.

Aşkardır ki, *V vektor fəzasının istənilən bazisi üç vektordan ibarətdir.* Doğrudan da, teorem 1-in nəticəsinə əsasən V fəzasının bazisi üçdən artıq vektordan ibarət ola bilməz. Digər tərəfdən bazis üçdən az vektordan da ibarət ola bilməz, məsələn, əgər bazisin iki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından ibarət olduğunu fərz etsək və bu vektorlara paralel olan σ müstəvisini götürsək, onda fəzanın istənilən $\vec{p}$ vektoru üçün $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ ayrılışını alarıq, buradan $\vec{p}$ vektorunun σ müstəvisinə paralel olması alınar, bu isə mümkün deyil.

Beləliklə, V vektor fəzasının ölçüsü üç ədədinə bərabərdir. Bu halda $\dim V = 3$ yazılışından istifadə olunur.

Tutaq ki, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - V vektor fəzasının bazisidir. Bazisi əmələ gətirən vektorlara *bazis vektorları*, o cümlədən $\vec{e}_1$ vektoruna *birinci*, $\vec{e}_2$ vektoruna *ikinci*, $\vec{e}_3$ vektoruna *üçüncü* bazis vektoru deyilir. Bu bazis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ şəklində də işarə olunur.

3. Verilmiş bazisdə vektorun koordinatları anlayışını daxil edək. Tutaq ki, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ -fəzanın verilmiş bazisi, $\vec{a}$ isə ixtiyari vektorudur. Teorem 1-ə görə elə yeganə a_1, a_2, a_3 ədədləri vardır ki,

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3. \tag{3}$$

(3) bərabərliyinin sağ tərəfi *$\vec{a}$ vektorunun $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisinin vektorları üzrə ayrılışı* adlanır. (3) düsturundakı a_1, a_2, a_3 ayrılış əmsalları $\vec{a}$ vektorunun bu bazisdəki *koordinatları* adlanır. a_1 ədədinə *birinci*, a_2 ədədinə *ikinci*, a_3 ədədinə isə *üçüncü koordinat* deyilir. Əgər $\vec{a}$ vektorunun verilmiş bazisdə a_1, a_2, a_3 koordinatları vardırsa, bu halda $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ yazılışmdan istifadə olunur.

Qeyd edək ki, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis vektorlarınm bu bazisdə $\vec{e}_1(1,0,0), \vec{e}_2(0,1,0), \vec{e}_3(0,0,1)$ koordinatları, sıfır vektorun isə $\vec{0}(0,0,0)$ koordinatları vardır.

Tutaq ki, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisində $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ və $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ vektorları verilmişdir. λ, μ -verilmiş ədədlər olduqda $\vec{p} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ vektorunun koordinatlarını təyin edək. Vektorun koordinatlarının tərifinə əsasən

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3,$$

ona görə də

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{e}_1 + \lambda a_2\vec{e}_2 + \lambda a_3\vec{e}_3, \quad \mu\vec{b} = \mu b_1\vec{e}_1 + \mu b_2\vec{e}_2 + \mu b_3\vec{e}_3.$$

Bu bərabərlikləri toplamaqla alarıq:

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = (\lambda a_1 + \mu b_1)\vec{e}_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2)\vec{e}_2 + (\lambda a_3 + \mu b_3)\vec{e}_3.$$

Beləliklə, $\vec{p} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ vektorunun $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisində $\vec{p}(\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \lambda a_3 + \mu b_3)$ koordinatları vardır.

Analoji qayda ilə $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$ və $\lambda\vec{a}$ vektorlarının koordinatlarını hesablamaqla aşağıdakı hökmlərin doğruluğu əsaslandırılır:

1^0. *İki vektorun cəminin hər bir koordinatı toplanan vektorların uyğun koordinatlarının cəminə bərabərdir.*

2^0. *İki vektorun fərqinin hər bir koordinatı bu vektorların uyğun koordinatlarının fərqinə bərabərdir.*

3^0. *Vektorun ədədə hasili zamanı onun hər bir koordinatı həmin ədədə vurulur.*

Koordinatları ilə verilən vektorların kollinearlıq əlamətini ifadə edən teoremi qeyd edək.

Teorem 2. *$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisində koordinatları ilə verilmş $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ və $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ vektorlarının kollinear olması üçün zəruri və kafi şərt onların koordinatlarının mütənasib olmasıdır.*

İsbatı. $\vec{a}$ və ya $\vec{b}$ vektorlarından biri sıfır vektor olduqda teoremin isbatı aşkardır, ona görə də $\vec{a} \neq \vec{0}$ və $\vec{b} \neq \vec{0}$ halına baxaq. Tutaq ki, $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Kollinear vektorlara dair teoremə əsasən elə λ ədədi vardır ki, $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. 3^0 xassəsinə görə $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$, $b_3 = \lambda a_3$, yəni $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının koordinatları mütənasibdirlər.

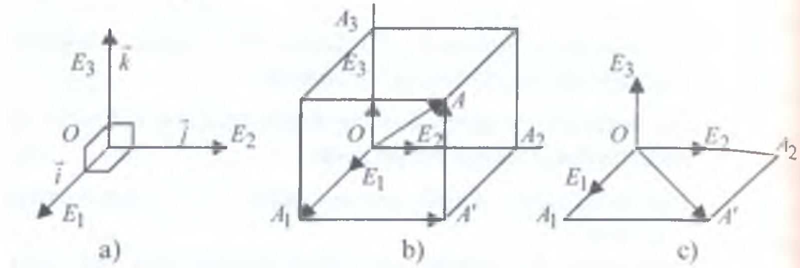
Tərsinə, tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının koordinatları mütənasibdirlər: $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$, $b_3 = \lambda a_3$. Bu bərabərlikləri uyğun olaraq $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlarına vurub, toplamaqla alarıq: $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Sonuncu bərabərlik $\vec{a} \parallel \vec{b}$ olduğunu göstərir. ■

4. Metrik xarakterli, yəni parçaların (vektorların) uzunluqlarının və ya bucaqların kəmiyyətlərinin hesablanması ilə bağlı olan məsələlərin həlli zamanı ortonormallaşdırılmış bazislər adlandırılan bazislərə baxılması məqsədəuyğundur.

Vektorları aşağıdakı şərtləri ödəyən $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisinə *ortonormallaşdırılmış bazis* deyilir:

a) $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ (yəni $\vec{i}, \vec{j}$ və $\vec{k}$ -vahid vektorlardır);

b) əgər $\overrightarrow{OE_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$ olarsa, onda E_1OE_2, E_1OE_3 , E_2OE_3 bucaqları düz bucaqlardır (şək. 7, a).



Şəkil 7

Teorem 3. *Ortonormallaşdırılmış* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *bazisində koordinatları ilə verilmiş* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ *vektorunun koordinatları*

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad (4)$$

düsturu ilə hesablanır.

İsbatı. Əvvəlcə teoremi $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ halı üçün isbat edək. $\vec{a}, \vec{i}, \vec{j}$ və $\vec{k}$ vektorlarını fəzanın müəyyən O nöqtəsindən ayıraq: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OE_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$ və düzbucaqlı paralelepipedi şəkil 7,b-də olduğu kimi quraq. Aydındır ki, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$. Lakin $\overrightarrow{OA_1} \parallel \vec{i}$, ona görə də $\overrightarrow{OA_1} = \alpha\vec{i}$. Analoji qayda ilə müəyyən edirik: $\overrightarrow{OA_2} = \beta\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3} = \gamma\vec{k}$, ona görə də $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ və ya $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$. Göründüyü kimi, α, β, γ ədədləri $\vec{a}$ vektorunun koordinatlarıdır, yəni $\alpha = a_1, \beta = a_2, \gamma = a_3$. Beləliklə, $\overrightarrow{OA_1} = a_1\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = a_2\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3} = a_3\vec{k}$ və ona görə gə $OA_1 = |a_1|$, $OA_2 = |a_2|$, $OA_3 = |a_3|$. Düzbucaqlı paralelepipedin diaqonalının kvadratı onun ölçülərinin kvadratları cəminə bərabərdir: $OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2$. Buradan $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ bərabərliyi və ya (4) bərabərliyi alınır.

(4) düsturu $\vec{a}$ vektorunun müəyyən koordinatları sıfra bərabər olduqda da doğrudur. Məsələn, $a_2 = a_2 = 0$ olduğunu fərz edək. Onda $\vec{a} = a_1\vec{i}, |\vec{a}| = |a_1||\vec{i}| = |a_1|$ və ya $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + 0^2 + 0^2}$.

$\vec{a}$ vektorunun bir koordinatı sıfra bərabər olduqda, digər iki koordinatı isə sıfırdan fərqli olduqda, məsələn, $a_3 = 0, a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ şərtləri ödənildikdə yuxarıdakı qurma zamanı A və A' nöqtələri üst-üstə düşürlər (şək. 7, b). OA_1AA_2 dördbucaqlısı düzbucaqlıdır, ona görə də $OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2$. Buradan $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$ və ya $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 0^2}$ düsturu alınır. ■

Məsələ 1. $\vec{a}(2,3,-1), \vec{b}(0,1,4), \vec{c}(1,0,-3)$ vektorları verilmişdir. $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ vektorunun koordinatlarını tapın.

Həlli. Vektorların toplanması və vektorun ədədə vurulması əməllərinin koordinatlarla ifadəsi ilə bağlı $1^0, 3^0$ xassələrini nəzərə alaq:

$\vec{p}(2 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1, 3 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0, -1 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-3)) = \vec{p}(5,5,-2)$.

Göründüyü kimi, $\vec{p}$ vektorunun $\vec{p}(5,5,-2)$ koordinatları vardır.

Məsələ 2. $\vec{e}_1(1,1,1), \vec{e}_2(1,1,2), \vec{e}_3(1,2,3)$ vektorlarının bazis əmələ gətirdiyini göstərin və $\vec{v}(6,9,14)$ vektorunun $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisində koordinatlarını tapın.

Həlli. Göstərək ki,

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = \vec{0} \qquad (5)$$

bərabərliyi yalnız $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ olduqda ödənilir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlarının və $\vec{0}$ vektorun koordinatlarını, eləcə də $1^0, 3^0$ xassələrini nəzərə alsaq, (5) bərabərliyini koordinatlarla yazılan aşağıdakı bircins tənliklər sistemi ilə əvəz edə bilərik:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemi cəbri toplama üsulu ilə həll etməklə müəyyən edirik ki, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, yəni verilmiş $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorları bazis əmələ gətirirlər. $\vec{v}$ vektorunun $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisindəki koordinatlarını v_1, v_2, v_3 ilə işarə edək. Onda

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3. \tag{6}$$

(6) bərabərliyini $\vec{v}$ vektorunun və $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis vektorlarının koordinatlarını nəzərə alaraq, aşağıdakı xətti tənliklər sistemi ilə əvəz edək:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 6, \\ v_1 + v_2 + 2v_3 = 9, \\ v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 14. \end{cases} \tag{7}$$

(7) xətti tənliklər sistemini cəbri toplama üsulu ilə həll etməklə alırıq: $v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 3$. Beləliklə, $\vec{v}$ vektorunun $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisində $\vec{v}(1,2,3)$ koordinatları vardır.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. α və β-nın hansı qiymətlərində $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ və $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorları kollinear olar?

Cavab: $\alpha = 4, \beta = 1.$

2. $\vec{p}(3,-2,1), \vec{q}(-1,1,-2), \vec{r}(2,1,-3)$ vektorları verilmişdir. $\vec{c}(11,-6,5)$ vektorunun $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ bazisi üzrə ayrılışını tapın.

Cavab: $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}.$

3. $\vec{a}(6,-2,-3)$ vektorunun vahid vektorunu tapın.

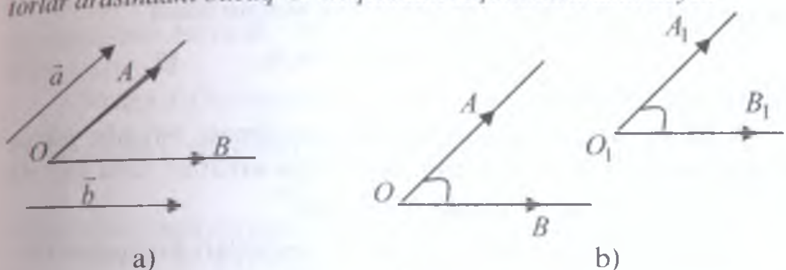
Cavab: $\vec{a}_0\left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}\right).$

4. $\vec{a}(2,-3,6)$ və $\vec{b}(-1,2,-2)$ vektorları eyni bir nöqtəyə tətbiq olunmuşdur. $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$ şərtini ödəyən və $\vec{a}$ vektoru ilə $\vec{b}$ vektoru arasındakı bucağın tənböləni istiqamətində yönələn $\vec{c}$ vektorunun koordinatlarını tapın.

Cavab: $\vec{c}(-3,15,12).$

§ 4. Vektorların skalyar hasili

1. Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ sıfırdan fərqli vektorlardır. İxtiyari O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ və $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ vektorlarını ayırıb, OA və OB şüalarına baxaq (şək. 8, a). *$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucaq* dedikdə OA və OB şüaları üst-üstə düşmədiyi halda bu şüalar arasındakı bucaq, yəni AOB bucağı başa düşülür. OA və OB şüaları üst-üstə düşdükdə isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasmdakı bucağın sıfra bərabər olması qəbul edilir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucaq $(\vec{a},\vec{b})$ kimi işarə olunur. Tərəfləri eyni istiqamətli olan bucaqlar bərabər olduğundan (şək. 8, b), *verilmiş vektorlar arasındakı bucaq O nöqtəsinin seçimindən asılı deyil.*



Şəkil 8

$(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{2}$ olduqda sıfırdan fərqli $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarına *qarşılıqlı perpendikulyar vektorlar* deyilir. Bu halda $\vec{a}\perp\vec{b}$ yazılır. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından heç olmasa birinin sıfır vektor olması halında $(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{2}$ olduğunu qəbul edirik. Buradan aydın olur ki, sıfır vektor istənilən vektora perpendikulyardır. Beləliklə, istənilən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün $0\le(\vec{a},\vec{b})\le\pi$.

İki vektorun uzunluqlarının onlar arasındakı bucağın kosinusuna hasilinə bu vektorların skalyar hasili deyilir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasili $\vec{a}\cdot\vec{b}$ və ya $\vec{a}\vec{b}$ kimi işarə olunur. Beləliklə, tərifə əsasən,

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) \tag{1}$$

Bu düsturdan görünür ki, *yalnız və yalnız* $\vec{a} \perp \vec{b}$ *olduqda* $\vec{a}\vec{b} = 0$. Bu nəticə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından heç olmasa biri sıfır vektor olduqda da doğrudur.

(1) düsturundan alınır ki, $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$. $\vec{a}\vec{a}$ ədədi $\vec{a}$ vektorunun *skalyar kvadratı* adlanır və $\vec{a}^2$ kimi işarə olunur. Beləliklə,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \tag{2}$$

2. İki vektorun skalyar hasilini onları koordinatlarına görə təyin etməyə imkan verən aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. *Ortonormallaşdırılmış bazisdə verilmiş $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ və $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ vektorlarının skalyar hasili*

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{3}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

İsbatı. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından heç olmasa biri sıfır vektor olduğu halda (3) bərabərliyinin doğruluğu aşkardır. Ona görə də $\vec{a} \neq \vec{0}$ və $\vec{b} \neq \vec{0}$ halına baxmaq kifayətdir.

Əvvəlcə fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırlar. Hər hansı O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ və $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorlarını ayıraq və OAB üçbucağına baxaq. Kosinuslar teoreminə görə $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\alpha$, burada $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$. $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ olduğundan sonuncu bərabərliyi belə yaza bilərik:

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}^2| - |\vec{b} - \vec{a}|^2\right). \tag{4}$$

$(\vec{b} - \vec{a})(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ olduğundan, § 3-dəki teorem 3-ə əsasən, $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$. Həmin teoremə görə,

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,\ |\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2. \tag{5}$$

Bu qiymətləri (4) düsturunda yerinə yazıb, müvafiq elementar çevirmələri aparsaq, (3) düsturunu alarıq.

İndi isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının kollinear olduğunu qəbul edək. Kollinear vektorlara dair teoremə əsasən elə λ ədədi vardır ki, $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Bu isə o deməkdir ki,

$$a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3. \qquad (6)$$

Skalyar hasilin tərifinə əsasən $\vec{a}\vec{b} = (\lambda\vec{b})\vec{b} = |\lambda\vec{b}||\vec{b}|\cos(\lambda\vec{b}, \vec{b})$. Buradan alınır ki, istənilən λ ədədi üçün: $\vec{a}\vec{b} = \lambda|\vec{b}|^2$. Bilirik ki, $|\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$, ona görə də

$$\vec{a}\vec{b} = \lambda(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (\lambda b_1)b_1 + (\lambda b_2)b_2 + (\lambda b_3)b_3.$$

Sonuncu bərabərlikdə (6) şərtlərindən istifadə etsək, (3) düsturunu alarıq. ■

Nəticə 1. *Ortonormallaşdırılmış bazisdə verilən $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ və $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ vektorları yalnız və yalnız*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

olduqda qarşılıqlı perpendikulyardırlar.

Nəticə 2. *Ortonormallaşdırılmış bazisdə verilən sıfırdan fərqli $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ və $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ vektorları arasında qalan bucağın kosinusu*

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \qquad (7)$$

düsturu ilə hesablanır.

Doğrudan da, (1) düsturuna görə $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Bu bərabərlikdə $\vec{a}\vec{b}, |\vec{a}|$ və $|\vec{b}|$ – nin (3) və (5) düsturlarından olan qiymətlərini yerinə yazsaq, (7) düsturunu alarıq. ■

3. Aşağıdakı teorem vektorların skalyar hasili əməlinin əsas xassələrini ifadə edir.

Teorem 2. *İxtiyari α və β ədədləri və ixtiyari $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:*

1^0. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.

2^0. $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$ və $\vec{a}(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$

3^0. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

İsbatı. Ortonormallaşdırılmış $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisini seçək və verilmiş vektorların $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3), \vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ koordinatlarını daxil edək. Bərabərliklərdən birini, məsələn 3^0 bərabərliyini isbat edək, qalanları eyni qayda ilə isbat olunur. $(\vec{a} + \vec{b})(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a + b_3)$ olduğundan, (3) dusturuna əsasən,
$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_2 + b_2)c_2 = (a_1c_1 + a_2c_2 +$
$+ a_3c_3) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$. ■

Nəticə 3. *İxtiyari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ və $\vec{d}$ vektorları üçün*

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d}$$

bərabərliyi doğrudur.

4. Skalyar hasildən istifadə edərək, ortonormallaşdırılmış bazisdə vektorun koordinatlarının həndəsi mənasını izah edək. Tutaq ki, $\vec{a}$ – ortonormallaşdırılmış $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisində $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ koordinatları ilə verilmiş sıfırdan fərqli vektordur. Bu o deməkdir ki, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini ardıcıl olaraq $\vec{i}, \vec{j}$ və $\vec{k}$ vektorlarına skalyar vuraq və $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$, $\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$ şərtlərini nəzərə alaq: $a_1 = \vec{a}\vec{i}, a_2 = \vec{a}\vec{j}, a_3 = \vec{a}\vec{k}$. Əgər $\varphi_1 = (\vec{a}, \vec{i}), \varphi_2 = (\vec{a}, \vec{j}), \varphi_3 = (\vec{a}, \vec{k})$ işarə etsək, onda sonuncu düsturları bu şəkildə yaza bilərik:

$$a_1 = |\vec{a}|\cos\varphi_1, \quad a_2 = |\vec{a}|\cos\varphi_2, \quad a_3 = |\vec{a}|\cos\varphi_3. \tag{8}$$

$\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \cos\varphi_3$ ədədləri $\vec{a}$ vektorunun $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisində *yönəldici kosinusları* adlanır. (8) düsturlarından alınır ki, *vektorun hər bir koordinatı bu vektorun uzunluğunun uyğun yönəldici kosinusa hasilinə bərabərdir.*

a_1, a_2, a_3 koordinatlarının (8) düsturlarından olan qiymət-lərini (5)-in 1-ci düsturunda nəzərə alaq:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2\left(\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3\right)$$

və ya $|\vec{a}| \neq 0$ şərtinə əsasən,

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1.$$

Beləliklə, *istənilən sıfırdan fərqli vektorun yönəldici kosinuslarının kvadratları cəmi vahidə bərabərdir.*

Məsələ 1. $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$ olduğunu bilərək, α əmsalının hansı qiymətində $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ və $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ vektorlarının qarşılıqlı perpendikulyar olduqlarını müəyyən edin.

Həlli: Məsələnin verilənlərinə əsasən yaza bilərik:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 4, \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 25, \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -5.$$

Aydındır ki, $\vec{p}$ və $\vec{q}$ vektorları yalnız və yalnız $\vec{p}\vec{q} = 0$ olduqda perpendikulyardırlar. Bu bərabərliyin sol tərəfində verilənləri nəzərə alaq:

$$\vec{p}\vec{q} = (\alpha\vec{a} + 17\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b}) = 3\alpha\vec{a}^2 + (51 - \alpha)\vec{a}\vec{b} - 17\vec{b}^2 = 17\alpha - 680 = 0$$

və ya $\alpha = 40$. Beləliklə, $\vec{p}$ və $\vec{q}$ vektorları $\alpha = 40$ qiymətində perpendikulyardırlar.

Məsələ 2. $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ şərtini ödəyən vahid vektorlar olduqda $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$ cəmini hesablayın.

Həlli. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ şərti göstərir ki, $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üçbucağın tərəfləridir. $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları vahid vektorlar olduqlarından, bu üçbucaq bərabərtərəflidir. Ona görə də istənilən iki ardıcıl gələn vektorlar arasında qalan bucaq 120^0 – yə bərabərdir. Beləliklə, skalyar hasilin tərifinə əsasən, yaza bilərik:

$$\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^0 + |\vec{b}||\vec{c}|\cos 120^0 + |\vec{b}||\vec{c}|\cos 120^0 =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ şərtini ödəyən $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları verilmişdir. $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=1$ və $|\vec{c}|=4$ olduğunu bilərək, $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$ cəmini tapın.

Cavab: $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}=-13.$

2. $\vec{a}+\vec{b}$ vektorunun $\vec{a}-\vec{b}$ vektoruna perpendikulyar olması üçün $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları hansı şərti ödəməlidirlər?

Cavab: $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ olmalıdır.

3. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ bucağını əmələ gətirirlər. $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$ olduğunu bilərək, $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ və $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ vektorları arasındakı bucağı hesablayın.

Cavab: $\alpha=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}.$

4. $\vec{a}(2,3,1)$ vektoruna kollinear olan və $\vec{x}\vec{a}=4$ şərtini ödəyən $\vec{x}$ vektorunu tapın.

Cavab: $\vec{x}\left(\dfrac{4}{7},\dfrac{6}{7},\dfrac{2}{7}\right).$

5. $\vec{a}(2,3,-1), \vec{b}(1,-2,3)$ vektorları verilmişdir. $\vec{x}\vec{k}=0, \vec{x}\vec{a}=9$, $\vec{x}\vec{b}=-4$ şərtlərini ödəyən $\vec{x}$ vektorunu təyin edin.

Cavab: $\vec{x}\left(\dfrac{6}{7},\dfrac{17}{7},0\right).$

II FƏSİL

MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ KOORDİNAT METODU

§ 5. Müstəvi üzərində afin koordinat sistemi. Düzbucaqlı dekart koordinat sistemi. Müstəvinin oriyentasiyası

1. Tutaq ki, V – üç ölçülü vektor fəzadır, L isə bu fəzanın vektorlarının müəyyən boş olmayan çoxluğudur. Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə L çoxluğu V fəzasının *vektor alt fəzası* adlanır:

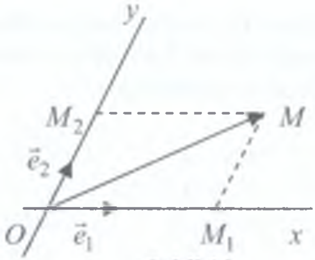
1^0. Əgər $\vec{a} \in L$ və $\vec{b} \in L$ olarsa, onda $\vec{a} + \vec{b} \in L$.

2^0. Əgər $\vec{a} \in L$ olarsa, onda istənilən həqiqi α ədədi üçün $\alpha\vec{a} \in L$.

L vektor alt fəzasının bazisi xətti asılı olmayan vektorların elə nizamlanmış sisteminə deyilir ki, L vektor alt fəzasının istənilən vektoru bu sistemin vektorlarının xətti kombinasiyası olsun. İsbat etmək olur ki, vektor alt fəzasının bütün bazisləri eyni sayda vektorlara malikdirlər. Bazis vektorlarının sayına *vektor alt fəzasının ölçüsü* deyilir. Kollinear olmayan $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları və ixtiyari α və β həqiqi ədədləri üçün $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ şəklində olan bütün vektorların $L(\vec{a}, \vec{b})$ çoxluğu iki ölçülü vektor alt fəzasını əmələ gətirir. Qeyd edək ki, $L(\vec{a}, \vec{b})$ vektor alt fəzasının istənilən vektoru $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının paralel olduqları müstəviyə paraleldir.

Tutaq ki, müstəvi üzərində hər hansı O nöqtəsi və bu müstəviyə paralel olan vektorların L vektor alt fəzasının ixtiyari $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisi verilmişdir. O nöqtəsindən və $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisindən ibarət olan üçlüyə müstəvi üzərində *afin koordinat sistemi* deyilir və $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ və ya $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ simvolu ilə işarə olunur (şək. 9). O nöqtəsi *koordinat başlanğıcı*, $\vec{e}_1$ və $\vec{e}_2$ – *koordinat vektorları* ($\vec{e}_1$ – birinci koordinat vektoru, $\vec{e}_2$ – ikinci koordinat vektoru) adlanır. Koordinat başlanğıcından keçən və koordinat vektorlarına paralel olan istiqamətlənmiş düz xətlərə *koordinat oxları* deyilir. Üzərindəki müsbət istiqamətin $\vec{e}_1$ vektoru ilə təyin olunduğu koordinat oxu *absis oxu* adlanır və Ox kimi işarə edilir. Digər ox-*ordinat oxu* adlanır və Oy kimi işarə olunur (şək.9). Ona görə də

Şəkil 9



Şəkil 10

$O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinat sistemini Oxy kimi də işarə edirlər.

2. Tutaq ki, $O\vec{e}_1\vec{e}_2$-afin koordinat sistemidir, M isə müstəvinin ixtiyari noqtəsidir (şək.10). $\overrightarrow{OM}$ vektoru M nöqtəsinin O nöqtəsinə nəzərən *radius-vektoru* adlanır. $\overrightarrow{OM}$ vektorunun $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisindəki x və y koordinatlarına M nöqtəsinin $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinat sistemindəki *koordinatları* deyilir. x ədədi M nöqtəsinin *absisi*, y ədədi isə *ordinatı* adlanır və $M(x, y)$ yazılır. Beləliklə, M nöqtəsinin $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ sistemindəki koordinatları elə x və y ədədlərinə deyilir ki,

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \qquad (1)$$

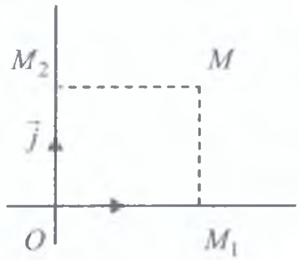
Seçilmiş koordinat sistemində müstəvinin hər bir M nöqtəsi (x, y) koordinatlarına malik olur və əgər $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ müxtə-lif nöqtələrdirlərsə, onda (x_1, y_1) və (x_2, y_2) cütləri üst-üstə düş-mürlər (yəni $x_1 \neq x_2$ və $y_1 \neq y_2$ bərabərsizliklərindən heç olmazsa biri ödənilir). Tərsinə, ədədlərin hər bir nizamlanmış (x, y) cütü üçün verilmiş koordinatları olan nöqtəni göstərmək mümkündür. Doğrudan da, əgər O nöqtəsindən $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ vektorunu ayırsaq, müstəvinin müəyyən M nöqtəsi üçün $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ bərabərliyi ödənilər. Aşkardır ki, (x, y) M nöqtəsinin koordinatları olar. Beləliklə, əgər müstəvi üzərində afin koordinat sistemi verilmişdirsə, onda müstəvinin nöqtələri ilə həqiqi ədədlərin (x, y) nizamlanmış cütləri arasında, yəni müstəvinin nöqtələri ilə R^2 çoxluğunun elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq təyin olunur, burada $R^2 = R \times R$ – həqiqi ədədlər çoxluğunun dekart kvadratıdır.

Tutaq ki, afin koordinat sistemində $A(x_1, y_1)$ və $B(x_2, y_2)$ nöqtələri verilmişdir. $\overrightarrow{AB}$ vektorunun koordinatlarını təyin edək. Aydındır ki, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. $\overrightarrow{OA}$ və $\overrightarrow{OB}$ vektorlarının A və B nöqtələrinin radius-vektorları kimi $\overrightarrow{OA}(x_1, y_1)$ və $\overrightarrow{OB}(x_2, y_2)$ koordinatları vardır. Beləliklə, $\overrightarrow{AB}$ vektoru $\overrightarrow{OB}$ və $\overrightarrow{OA}$ vektorlarının fərq vektoru olaraq

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \qquad (2)$$

koordinatlarına malikdir, yəni *vektorun hər bir koordinatı vektorun sonunun və başlanğıcının uyğun koordinatlarının fərqinə bərabərdir*.

3. Koordinat vektorları qarşılıqlı perpendikulyar vahid vektorlar olan koordinat sisteminə *düzbucaqlı dekart* koordinat sistemi deyilir. Başlanğıcı O nöqtəsində olan belə koordinat sistemi $O\vec{i}\vec{j}$ və ya $(O, \vec{i}, \vec{j})$ kimi işarə olunur burada $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$, $\vec{i}\vec{j} = 0$ (şək. 11).



Şəkil 11

Düzbucaqlı koordinat sistemində $M(x, y)$ nöqtəsinin koordinatlarınm mənasını izah edək. $x\vec{i} \parallel \vec{i}$ və $y\vec{j} \parallel \vec{j}$ olduğundan Ox və Oy koordinat oxları üzərində uyğun olaraq elə M_1 və M_2 nöqtələri vardır ki, $x\vec{i} = \overrightarrow{OM_1}, y\vec{j} = \overrightarrow{OM_2}$, ona görə də $OM_1 = |x|, OM_2 = |y|$. M_1 və M_2 nöqtələri M nöqtəsinin koordinat oxları üzərində proyeksiyalarıdır (şək. 11). Beləliklə, M_1 nöqtəsi Ox oxunun müsbət yarımoxunun nöqtəsi olduqda

$x = OM_1$, mənfi yarımoxunun nöqtəsi olduqda $x = -OM_1$ və M_1 nöqtəsi O nöqtəsi ilə üst-üstə düşdükdə $x = 0$. M nöqtəsinin y ordinatı da eyni həndəsi mənaya malikdir.

Tutaq ki, düzbucaqlı dekart $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində A, B nöqtələrinin $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ koordinatları vardır. Bu nöqtələr arasındakı məsafəni, yəni AB parçasının uzunluğunu hesablayaq. Vektorun uzunluğunun tərifinə əsasən, $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right|$. (2)-dən göründüyü kimi, $\overrightarrow{AB}$ vektorunun $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ koordinatları vardır, ona görə də bu vektorun uzunluğu § 3-dəki (4) düsturuna analoji olan aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3}$$

4. Tutaq ki, M_1 və M_2 müstəvinin hər hansı iki nöqtəsidir, λ isə $\lambda \neq -1$ şərtini ödəyən müəyyən ədəddir.

$$\overline{M_1M} = \lambda \overline{MM_2} \tag{4}$$

şərti ödənildikdə deyirlər ki, M nöqtəsi $\overline{M_1M_2}$ (istiqamətlənmiş) parçasını λ *nisbətində bölür.*

(4) bərabərliyindən müəyyən edirik ki, $\overrightarrow{M_1M}$ və $\overline{MM_2}$ vektorları kollineardırlar. Bu isə o deməkdir ki, M nöqtəsi M_1M_2 düz xətti üzərində yerləşir. $\lambda > 0$ olduqda, yəni $\overline{M_1M}$ və $\overline{MM_2}$ vektorları eyni istiqamətli olduqda M nöqtəsi M_1M_2 parçasına aid olur. $\lambda < 0$ şərti ödənildikdə isə M_1M_2 parçasından kənarda yerləşir.

Müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemini daxil edək və fərz edək ki, $\overline{M_1M_2}$ parçasının başlanğıcının və sonunun $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ koordinatları vardır. M_1M_2 parçasını λ nisbətində bölən $M(x, y)$ nöqtəsinin koordinatlarını təyin edək. Aydındır ki, $\overline{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overline{OM_1}, \overline{MM_2} = \overline{OM_2} - \overrightarrow{OM}$, ona görə də

(4) bərabərliyini belə yazmaq olar: $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\lambda\left(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}\right)$. Buradan alırıq: $(1+\lambda)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{OM_2}$. $\lambda+1\neq 0$ olduğundan,

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OM_1}+\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OM_2}. \qquad (5)$$

$\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_1}$ və $\overrightarrow{OM_2}$ vektorları M, M_1 və M_2 nöqtələrinin radius-vektorları olduqlarından, $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ bazisində $\overrightarrow{OM}(x,y)$, $\overrightarrow{OM_1}(x_1,y_1)$, $\overrightarrow{OM_2}(x_2,y_2)$ koordinatlarına malikdirlər. (5) bərabərliyində vektorun koordinatlarınm 3^0 və 1^0 xassələrindən (§ 3) istifadə etsək, x və y koordinatları üçün alarıq:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (6)$$

Xüsusi halda, M_1M_2 parçasının orta nöqtəsinin, yəni bu parçanı yarıya bölən $(\lambda=1)$ nöqtənin $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ koordinatları vardır.

5. Tutaq ki, L – müstəviyə paralel olan vektorların iki ölçülü vektor alt fəzasıdır. Bu vektor alt fəzasının hər hansı iki $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ və $B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ bazislərinə baxaq. B bazisinin vektorlarım A bazisinin vektorları üzrə ayıraq:

$$\vec{b}_1=c_{11}\vec{a}_1+c_{21}\vec{a}_2,\ \vec{b}_2=c_{12}\vec{a}_1+c_{22}\vec{a}_2. \qquad (7)$$

$\vec{b}_1$ və $\vec{b}_2$ vektorlarının koordinatlarından düzələn $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$ matrisinə A bazisindən B bazisinə *keçid matrisi*, onun determinantına, yəni $c_{11}c_{22}-c_{21}c_{12}$ ədədinə isə *A bazisindən B bazisinə keçid matrisinin determinantı* deyilir və belə işarə olunur:

$$A|B=(\vec{a}_1\vec{a}_2)|(\vec{b}_1\vec{b}_2)=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}. \qquad (8)$$

$\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ vektorları xətti asılı olmadığından, $A|B\neq 0$.

Bir bazisdən digərinə keçid matrislərinin determinantlarının bəzi xassələrini qeyd edək.

1^0. *İstənilən* $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ *bazisi üçün:* $A|A=1$.

Doğrudan da, $\vec{a}_1=1\cdot\vec{a}_1+0\cdot\vec{a}_2, \vec{a}_2=0\cdot\vec{a}_1+1\cdot\vec{a}_2$, ona görə də $A|A=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$. ■

2^0. *İxtiyari üç* $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$, $B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ *və* $C=(\vec{c}_1,\vec{c}_2)$ *bazisləri üçün*

$$(A|B)(B|C)=A|C. \tag{9}$$

bərabərliyi doğrudur.

Xassənin doğruluğunu əsaslandırmaq üçün fərz edək ki, $\vec{c}_1=d_{11}\vec{b}_1+d_{21}\vec{b}_2$, $\vec{c}_2=d_{12}\vec{b}_1+d_{22}\vec{b}_2$. Bu bərabərliklərin sağ tərəflərində (7) ayrılışlarını nəzərə alaq:

$$\vec{c}_1=d_{11}(c_{11}\vec{a}_1+c_{21}\vec{a}_2)+d_{21}(c_{12}\vec{a}_1+c_{22}\vec{a}_2),$$
$$\vec{c}_2=d_{12}(c_{11}\vec{a}_1+c_{21}\vec{a}_2)+d_{22}(c_{12}\vec{a}_1+c_{22}\vec{a}_2).$$

Buradan A bazisindən C bazisinə keçid matrisinin determinantını təyin edirik:

$$A|B=\begin{vmatrix}d_{11}c_{11}+d_{21}c_{12} & d_{12}c_{11}+d_{22}c_{12}\\ d_{11}c_{21}+d_{21}c_{22} & d_{12}c_{21}+d_{22}c_{22}\end{vmatrix}.$$

$B|C=\begin{vmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{vmatrix}$ olduğundan, (8) düsturunu nəzərə alaraq, müvafiq hesablamalar aparmaqla (9) bərabərliyinin doğruluğunu müəyyən edirik. ■

Əgər (9) bərabərliyində $C=A$ qəbul edib 2^0 xassəsindən istifadə etsək, 3^0 xassəsini alarıq.

3^0. $(A|B)(B|A)=1$.

6. L alt fəzasının bütün bazisləri çoxluğunu **B** ilə işarə edək. $A|B>0$ olduqda deyəcəyik ki, $A,B\in\mathbf{B}$ bazisləri Δ münasibətindədirlər (eyni oriyentasiyaya malikdirlər). Bu halda $A\Delta B$ yazılışından istifadə edəcəyik. İsbat edək ki, *L alt fəzasının bütün bazislərinin* **B** *çoxluğunda Δ münasibəti ekvivalentlik münasibətidir.*

1) İstənilən A bazisi üçün: $A\Delta A$. Bu nəticə 1^0 xassəsindən

alınır.

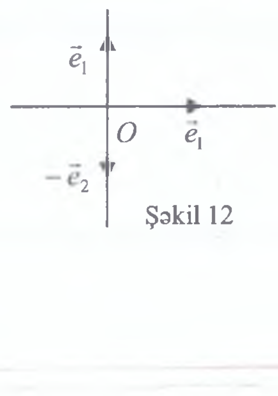
2) Əgər $A\Delta B$ olarsa, onda $B\Delta A$. Doğrudan da, $A\Delta B \Rightarrow$ $\Rightarrow A|B > 0$. Lakin 3^0 xassəsindən alınır ki, $B|A = \frac{1}{A|B} > 0$, ona görə də $B\Delta A$.

3) Əgər $A\Delta B$ və $B\Delta C$ olarsa, onda $A\Delta C$. Doğrudan da, $A\Delta B \Rightarrow A|B > 0$, $B\Delta C \Rightarrow B|C > 0$. 2^0 xassəsinə əsasən, $A|C =$ $= (A|B)(B|C) > 0$, yəni $A\Delta C$.

İsbat edək ki, **B** / Δ faktor-çoxluğu yalnız iki elementdən ibarətdir. Bundan ötrü $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ və $B = (\vec{a}_2, \vec{a}_1)$ bazislərinə baxaq. $A|B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ olduğundan, K_A və K_B ekvivalentlik sinifləri üst-üstə düşmürlər. Yoxlamaq olur ki, ixtiyari $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ bazisi ya K_A sinfinə, ya da K_B sinfinə daxildir. Doğrudan da, 2^0 xassəsinə görə $A|C = (A|B)(B|C)$. Lakin $A|B = -1$, ona görə də $A|C = -B|C$. Buradan alınır ki, ya $A|C > 0$, ya da $B|C > 0$. Birinci halda $C \in K_A$, ikinci halda isə $C \in K_B$ olur.

B / Δ faktor-çoxluğunun elementlərindən hər birinə L vektor alt fəzasının *oriyentasiyası* deyilir. Bu oriyentasiyalardan birini seçək və onu *müsbət oriyentasiya* (digərini isə *mənfi oriyentasiya*) adlandıraq. Müsbət oriyentasiyanın seçildiyi L vektor alt fəzasına *oriyentasiya olunmuş* alt fəza deyilir. Müsbət oriyentasiyalı bazislər *sağ* bazislər, mənfi oriyentasiyalı bazislər isə *sol* bazislər adlanır.

Vektorlarının alt fəzası oriyentasiya olunmuş müstəviyə *oriyentasiya olunmuş* müstəvi deyilir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisi sağ bazis olduqda $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinat sistem *sağ*, sol bazis olduqda isə *sol* koordinat sistemi adlanır. Şəkil 12-də $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ - sağ koordinat sistemi, $O\vec{e}_1(-\vec{e}_2)$ – sol koordinat sistemidir. Ümumiyyətlə, koordinat sis-



Şəkil 12

temlərinin təsviri zamanı sağ koordinat sisteminə elə koordinat sistemi aid edilir ki, onun Ox və Oy oxları sağ əlin açılmış ovucuna baxdıqda baş və şəhadət barmaqları kimi yerləşmiş olsunlar.

Məsələ 1. Koordnat bucaqlarının tənbölənləri üzərində $M(-2,0)$ nöqtəsindən 10 vahid məsafədə olan nöqtələri tapın.

Həlli. I,III koordinat bucaqlarının tənböləni üzərində ixtiyari N nöqtəsinin $N(x,x)$ koordinatları vardır. Ona görə də

$$MN = 10 \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + x^2} = 10 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -8.$$

Beləliklə, I,III koordinat bucaqlarının tənböləni üzərində $(6,6)$ və $(-8,-8)$ nöqtələri $M(-2,0)$ nöqtəsindən 10 vahid məsafədədirlər. II,IV koordinat bucaqlarının tənböləni üzərində ixtiyari N nöqtəsinin $N(x,-x)$ koordinatları vardır. Buradan aydın olur ki,

$$MN = 10 \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (-x)^2} = 10 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -8.$$

Ona görə də II,IV koordinat bucaqlarının tənböləni üzərində $(6,-6)$ və $(-8,8)$ nöqtələri $M(-2,0)$ nöqtəsindən 10 vahid məsafədədirlər.

Məsələ 2. $A(-3,5)$ və $B(-1,2)$ nöqtələrindən keçən düz xətt üzərində absisi $x = 5$ olan nöqtəni tapın.

Həlli. Axtarılan nöqtəni $C(5,y)$ ilə işarə edək. Tutaq ki, C nöqtəsi AB parçasını λ nisbətində bölür. Bu o deməkdir ki,

$$5 = \frac{-3 + \lambda(-1)}{1+\lambda} \Rightarrow 5 + 5\lambda = -3 - \lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{3}.$$

Onda C nöqtəsinin ordinatını aşağıdakı kimi hesablaya bilərik:

$$y = \frac{5 + \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot 2}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{15-8}{3}}{\frac{3-4}{3}} = -7.$$

Beləliklə, axtarılan nöqtə $C(5,-7)$ nöqtəsidir.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. $A(2,-1)$ nöqtəsindən keçən və koordinat oxlarından hər birinə toxunan çevrənin mərkəzini və radiusunu tapın.

Cavab: Məsələnin şərtlərini ödəyən iki çevrə vardır: mərkəzlər: $M_1(1,-1)$ və $M_2(5,-5)$, radiuslar: $r_1 = 1$ və $r_2 = 5$.

2. Verilmiş $A(2,2), B(-5,1)$ və $C(3,-5)$ nöqtələrindən bərabər məsafədə olan nöqtəni tapın.

Cavab: $M(-1,-2)$.

3. $A(7,-3)$ və $B(-2,1)$ nöqtələrindən eyni məsafədə olması üçün $M(x,y)$ nöqtəsinin koordinatları hansı şərti ödəməlidirlər?

Cavab: $18x - 8y = 53$.

4. Üçbucağın təpələrinin $(1,4),(-5,0)$ və $(-2,-1)$ nöqtələrində olduğunu bilərək, onun medianlarının kəsişmə nöqtəsini tapın.

Cavab: $(-2,1)$.

5. $A(4,1), B(7,5), C(-4,7)$ üçbucağı verilmişdir. Bu üçbucağın A bucağının tənböləninin qarşı BC tərəfi ilə kəsişmə nöqtəsini tapın.

Cavab: $M\left(3\frac{1}{3}, 5\frac{2}{3}\right)$.

6. $A(4,1)$ və $B(-2,4)$ nöqtələrini birləşdirən düz xəttin absis oxunu kəsdiyi nöqtəni tapın.

Cavab: $C(6,0)$.

§ 6. Koordinatların çevirmə düsturları. Polyar koordinatlar

1. Oriyentasiya olunmuş müstəvi üzərində vektorlar arasında qalan istiqamətlənmiş bucaq anlayışını daxil edək. Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ – müəyyən nizamla verilmiş sıfırdan fərqli vektorlardır: $\vec{a}$ – birinci vektordur, $\vec{b}$ isə ikinci vektordur. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının kollinear olmadığı halda $\vec{a}$ vektoru ilə $\vec{b}$ vektoru arasında qalan *istiqamətlənmiş (oriyentasiya olunmuş)* bucaq olaraq, $\vec{a},\vec{b}$ bazisi sağ bazis olduqda $(\vec{a},\vec{b})$ kəmiyyəti, $\vec{a},\vec{b}$ bazisi sol bazis olduqda isə $-\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ kəmiyyəti götürülür. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının istiqamətləri eyni olduqda onlar arasında qalan istiqamətlənmiş bucağın 0-a, əks olduqda isə π-yə bərabər olması qəbul edilir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasında qalan istiqamətlənmiş bucaq $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ kimi işarə olunur. Beləliklə, sıfırdan fərqli istənilən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün $-\pi < \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) \le \pi$.

$\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = -\left(\widehat{\vec{b},\vec{a}}\right)$ olduğundan, koolinear olmayan $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün

$$\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = -\sin\left(\widehat{\vec{b},\vec{a}}\right),\quad \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{b},\vec{a}}\right).$$

Göstərmək olur ki, sıfırdan fərqli istənilən $\vec{a},\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üçün

$$\sin\left(\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) + \left(\widehat{\vec{b},\vec{c}}\right)\right) = \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{c}}\right),$$

$$\cos\left(\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) + \left(\widehat{\vec{b},\vec{c}}\right)\right) = \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{c}}\right). \qquad (2)$$

Aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 1 . *Ortonormallaşmış sağ $\vec{i},\vec{j}$ bazisində sıfırdan fərqli istənilən $\vec{a}$ vektorunun (a_1,a_2) koordinatları*

$$a_1 = |\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right),\ a_2 = |\vec{a}|\sin\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right) \qquad (3)$$

düsturları ilə hesablanır.

İsbatı. Vektorun koordinatlarının tərifinə görə $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$. Bu bərabərliyi $\vec{i}$ vektoruna skalyar vurmaqla alarıq: $a_1 = \vec{i}\vec{a} = |\vec{i}||\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right)$, və ya $a_1 = |\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right)$. Analoji

qayda ilə əvvəlki bərabərliyi $\vec{j}$ vektoruna skalyar vurmaqla yaza bilərik: $a_2 = \vec{j}\vec{a} = |\vec{j}||\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{j},\vec{a}}\right)$, və ya $a_2 = |\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{j},\vec{a}}\right)$.

(2) düsturuna əsasən, $\cos\left(\widehat{\vec{j},\vec{a}}\right) = \cos\left(\left(\widehat{\vec{j},\vec{i}}\right) + \left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right)\right) =$

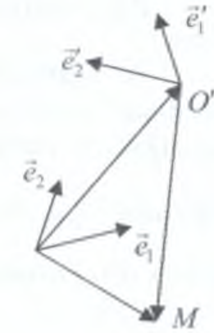
$= \cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right)$, ona görə də $a_2 = |\vec{a}|\sin\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right)$. ■

Nəticə. *Ortonormallaşmış $\vec{i},\vec{j}$ bazisində vahid $\vec{a}_0$ vektorunun $\left(\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}_0}\right), \sin\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}_0}\right)\right)$ koordinatları vardır.*

2. Müstəvi üzərində iki $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ və $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ afin koordinat sistemlərini nəzərdən keçirək. Birinci sistemi köhnə, ikinci sistemi isə yeni koordinat sistemi adlandıraq. Tutaq ki, M – müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir və bu nöqtənin köhnə sistemdə x,y koordinatları, yeni sistemdə isə x',y' koordinatları vardır (şək.13). Koordinatların çevirməsi ilə bağlı məsələnin mahiyyəti yeni koordinat başlanğıcının və yeni koordinat vektorlarının köhnə sistemdəki

$$\vec{e}_1'(c_{11},c_{21}),\ \vec{e}_2'(c_{12},c_{22}),\ O'(x_0,y_0) \qquad (4)$$

koordinatlarına əsasən M nöqtəsinin köhnə sistemdəki x,y koordinatlarını həmin nöqtənin yeni sistemdəki x',y' koordinatları ilə ifadə etməkdən ibarətdir.



Şəkil 13

Vektorların və nöqtələrin koordinatlarının tərifinə əsasən, (4)-dən alarıq:

$$\vec{e}_1' = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2,\ \vec{e}_2' = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2,\ \overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2. \qquad (5)$$

Üçbucaq qaydasına görə, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Buradan aydın olur ki, $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{e}_1' + y\vec{e}_2'$, və ya (5) bərabərliklərinə əsasən:

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + (c_{11}x' + c_{12}y')\vec{e}_1 + (c_{21}x' + c_{22}y')\vec{e}_2.$$

$\vec{e}_1$ və $\vec{e}_2$ vektorları kollinear olmadıqlarına görə bu bərabərlikdən aşağıdakı düsturlar alınır:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0. \end{aligned} \qquad (6)$$

(6) düsturları afin koordinat sisteminin *çevirmə düsturları* adlanır. Qeyd edək ki, bu düsturlardakı əmsallardan düzələn $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ matrisi $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisindən $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ bazisinə keçid matrisidir.

$\vec{e}_1$ və $\vec{e}_2$ vektorları kollinear olmadığından, $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, ona görə də (6) sistemi x', y' koordinatlarına görə uyuşan sistemdir. Bu isə M nöqtəsinin yeni $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ sistemindəki koordinatlarını həmin nöqtənin köhnə $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ sistemindəki koordinatları ilə ifadə etməyə imkan verir.

Afin koordinat sisteminin çevirməsinin iki xüsusi halına baxaq.

A. *Başlanğıcın köçürülməsi.* Bu halda $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ və $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ koordinat sistemləri eyni koordinat vektorlarına və müxtəlif başlanğıclara malik olurlar. $\vec{e}_1 = \vec{e}_1', \vec{e}_2 = \vec{e}_2'$ olduğundan $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisindən $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ bazisinə keçid matrisi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şəklində olur, ona görə də (6) çevirmə düsturları belə yazılır:

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0. \qquad (7)$$

B. *Koordinat vektorlarının əvəz edilməsi.* Bu halda $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ və $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ koordinat sistemlərinin ortaq başlanğıcı vardır və koordinat vektorları ilə fərqlənirlər. O' və O nöqtələri üst-üstə düşdüklərindən, $x_0 = 0, y_0 = 0$ olur. Nəticədə (6) çevirmə düsturları bu şəkildə yazılır:

$$x = c_{11}x' + c_{12}y', \quad y = c_{21}x' + c_{22}y'. \qquad (8)$$

3. İndi isə düzbucaqlı dekart koordinat sistemlərinin çevirməsinə baxaq. Düzbucaqlı dekart koordinat sistemi afin koordinat sisteminin xüsusi halı olduğundan, bir düzbucaqlı koordinat sistemindən digərinə keçid zamanı da (6) düsturlarından istifadə edə bilərik, lakin bu halda keçid matrisinin c_{ij} elementlərinin üzərinə əlavə məhdudiyyətlər qoyulur. Köhnə $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sisteminin sağ oriyentasiyaya malik olduğunu fərz edək və iki hala baxaq.

A. $O\vec{i}\vec{j}$ və $O'\vec{i}'\vec{j}'$ koordinat sistemlərinin oriyentasiyaları eynidir, yəni hər iki sistem sağ oriyentasiyaya malikdir. Tutaq ki, $\alpha = \left(\widehat{\vec{i},\vec{i}'}\right)$. Teorem 1-in nəticəsinə görə $\vec{i}'$ və $\vec{j}'$ vektorlarının

$$\vec{i}'(\cos\alpha, \sin\alpha), \vec{j}'\left(\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}'}\right), \sin\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}'}\right)\right) \tag{9}$$

koordinatları vardır. Lakin

$$\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}'}\right) = \cos\left[\left(\widehat{\vec{i},\vec{i}'}\right) + \left(\widehat{\vec{i}',\vec{j}'}\right)\right] = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}'}\right) = \sin\left[\left(\widehat{\vec{i},\vec{i}'}\right) + \left(\widehat{\vec{i}',\vec{j}'}\right)\right] = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha.$$

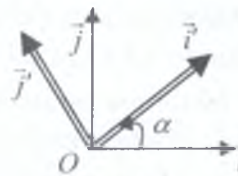
Beləliklə, (6) düsturları aşağıdakı kimi yazılır:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0, \end{aligned} \tag{10}$$

burada

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1.$$

Hər iki koordinat sisteminin ortaq O başlanğıcına malik olduğu hala baxaq. Bu halda deyirlər ki, *$O'\vec{i}'\vec{j}'$ koordinat sistemi $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemindən O nöqtəsi ətrafında α bucağı qədər dönmə nəticəsində alınmışdır* (şək.14). O' və O nöqtələri üst-üstə düşdüklərindən, $x_0 = 0, y_0 = 0$. Ona görə də (10) düsturları belə yazılır:



şəkil 14

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \qquad (11)$$

B. $O\vec{i}\vec{j}$ və $O'\vec{i}'\vec{j}'$ əks oriyentasiya olunmuş koordinat sistemləridir: $O\vec{i}\vec{j}$ sağ, $O'\vec{i}'\vec{j}'$ isə sol koordinat sistemidir. Bu halda da $\vec{i}'$ və $\vec{j}'$ vektorlarının (9) koordinatları vardır, lakin burada $\left(\widehat{\vec{i}',\vec{j}'}\right) = -\frac{\pi}{2}$, ona görə də

$$\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}'}\right) = \cos\left[\left(\widehat{\vec{i},\vec{i}'}\right) + \left(\widehat{\vec{i}',\vec{j}'}\right)\right] = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha;$$
$$\sin\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}'}\right) = \sin\left[\left(\widehat{\vec{i},\vec{i}'}\right) + \left(\widehat{\vec{i}',\vec{j}'}\right)\right] = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha.$$

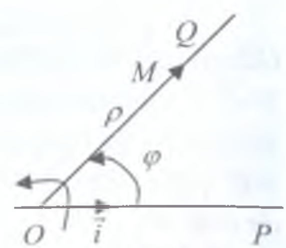
Nəticədə (6) düsturları belə yazılır:

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha + x_0,$$
$$y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + y_0, \qquad (12)$$

burada

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -1.$$

4. Müstəvi üzərində afin koordinat sistemindən (və onun xüsusi halı olan düzbucaqlı dekart koordinat sistemindən) başqa, polyar koordinat sistemindən də istifadə olunur. *Oriyentasiya olunmuş* müstəvi üzərində O nöqtəsinin və vahid $\vec{i}$ vektorunun verildiyini fərz edək. O nöqtəsindən və $\vec{i}$ vektorundan ibarət olan cüt *polyar koordinat sistemi* adlanır və belə işarə olunur: $O\vec{i}$ və ya $(O,\vec{i})$. O nöqtəsindən $\vec{i}$ vektoruna paralel keçən və müsbət istiqaməti bu vektorla təyin olunan OP oxuna baxaq. O nöqtəsinə *polyus*, OP oxuna isə *polyara* deyilir (şək. 15).

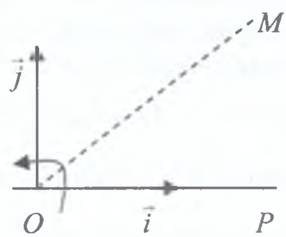


Şəkil 15

Tutaq ki, M – müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir. O nöqtəsindən M nöqtəsinə qədər olan məsafəni ρ ilə, $\left(\vec{i} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$ istiqamətlənmiş bucağını isə φ ilə işarə edək, yəni $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|, \varphi = \left(\vec{i} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$. M nöqtəsi O nöqtəsi ilə üst-üstə düşdükdə $\rho = 0$ olur, φ bucağı isə təyin olunmur. ρ və φ ədədləri müstəvi üzərində M nöqtəsinin vəziyyətini birqiymətli təyin edirlər. Bu ədədlərə M nöqtəsinin $O\vec{i}$ polyar koordinat sistemində *polyar koordinatları* deyilir. ρ ədədi M nöqtəsinin birinci polyar koordinatı, və ya *polyar radiusu*, φ ədədi isə bu nöqtənin ikinci polyar koordinatı, və ya *polyar bucağı* adlanır. M nöqtəsinin polyar koordinatları ρ, φ olduqda belə yazırlar: $M(\rho, \varphi)$.

Qeyd edək ki, ρ polyar radiusu ixtiyari nöqtə üçün mənfi olmayan ədəddir və $[0, +\infty)$ aralığında dəyişir. φ polyar bucağı isə $-\pi < \varphi \le \pi$ şərtini ödəyir.

5. Hər bir $O\vec{i}$ polyar koordinat sisteminə müsbət oriyentasiya olunmuş $O\vec{i}\vec{j}$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemini qoşmaq mümkündür, burada başlanğıc O nöqtəsidir, birinci koordinat vektoru $\vec{i}$ vektorudur və $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \frac{\pi}{2}$ (şək. 16).



Şəkil 16

Tutaq ki, ρ və φ - O nöqtəsindən fərqli olan M nöqtəsinin polyar koordinatlarıdır, x, y isə onun qoşulmuş düzbucaqlı koordinat sistemində düzbucaqlı koordinatlarıdır. Onda $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ və $\varphi = \left(\vec{i} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$ Teorem 1-ə görə

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi. \tag{13}$$

M nöqtəsinin ρ və φ polyar koordinatlarını bilərək, (13) düsturlarına əsasən bu nöqtənin düzbucaqlı dekart koordinatlarını təyin etmək olar. (13) düsturlarından alırıq: $x^2 + y^2 = \rho^2$ və ona görə də

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (14)$$

O polyusundan fərqli olan M nöqtəsi üçün (13) və (14) düsturlarından müəyyən edirik:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (15)$$

Koordinat başlanğıcından fərqli olan M nöqtəsinin x, y düzbu-caqlı dekart koordinatlarını bilməklə (14) və (15) düsturlarına əsasən bu nöqtənin ρ və φ polyar koordinatlarını təyin etmək olur.

Məsələ 1. OAB üçbucağında AD və BE medianları O' nöqtəsində kəsişirlər. $\vec e_1=\overrightarrow{OA}, \vec e_2=\overrightarrow{OB}, \vec e_1'=\overrightarrow{O'A}, \vec e_2'=\overrightarrow{O'B}$ qəbul edə-rək, $O\vec e_1\vec e_2$ koordinat sitemindən $O'\vec e_1'\vec e_2'$ koordinat sisteminə keçid düsturlarını yazın.

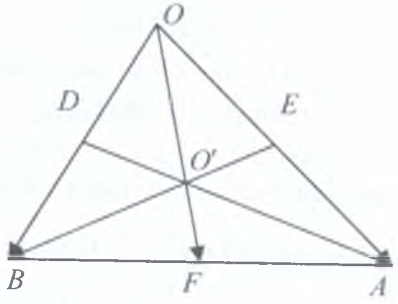
Həlli. Şəkil 17-dən göründüyü kimi,

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}(\vec e_1+\vec e_2).$$

Digər tərəfdən, hər bir median təpədən başlayaraq, $2:1$ nisbətində bölündüyündən,

$$\overrightarrow{OO'}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec e_1+\vec e_2)=\frac{1}{3}\vec e_1+\frac{1}{3}\vec e_2,$$

yəni O' nöqtəsinin $O\vec e_1\vec e_2$ koordinat sistemində $O'\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ koordinatları vardır. Şəkildən görünür ki,



Şəkil 17

$$\overrightarrow{O'A}=\vec e_1'=\vec e_1-\overrightarrow{OO'}=\frac{2}{3}\vec e_1-\frac{1}{3}\vec e_2,$$

$$\overrightarrow{O'B}=\vec e_2'=\vec e_2-\overrightarrow{OO'}=-\frac{1}{3}\vec e_1+\frac{2}{3}\vec e_2,$$

yəni $\vec e_1', \vec e_2'$ bazis vektorlarının $O\vec e_1\vec e_2$ koordinat sistemində $\vec e_1'\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, $\vec e_2'\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ koordinatları vardır. Ona görə də koordinatların (6) çevirmə düsturları belə yazılar:

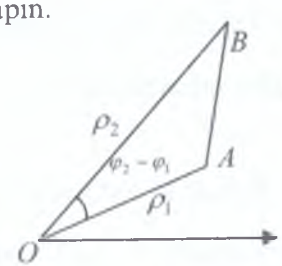
$$x=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'+\frac{1}{3},$$

$$y=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}.$$

Məsələ 2. Polyar ox üzərində yerləşən və $A\left(4\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ nöqtəsindən 5 vahid məsafədə olan nöqtəni tapın.

Həlli. Əgər $A(\rho_1,\varphi_1), B(\rho_2,\varphi_2)$ nöqtələri verilərsə, onda kosinuslar teoreminə əsasən, bu nöqtələr arasındakı məsafə aşağıdakı kimi hesablanar (şək. 18):

$$AB=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}.$$



Şəkil 18

Polyar ox üzərində yerləşən hər bir nöqtənin polyar bucağı 0-a bərabər olduğundan axtarılan nöqtəni $B(\rho,0)$ ilə işarə edək. Onda yuxarıdakı məsafə düsturunu və məsələnin şərtini nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\sqrt{32+\rho^2-2\cdot4\sqrt{2}\cdot\rho\cos\frac{\pi}{4}}=5\Rightarrow\rho^2-8\rho+32=25\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho^2-8\rho+7=0\Rightarrow\rho_1=7,\rho_2=1.$$

Beləliklə, axtarılan nöqtələr $B_1(7,0)$ və $B_2(1,0)$ nöqtələridir.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. OAB ixtiyari üçbucaqdır və $\vec e_1=\overrightarrow{OA}, \vec e_2=\overrightarrow{OB}$. $O'=A$, $\vec e_1'=\overrightarrow{AB}$, $\vec e_2'=\overrightarrow{AO}$ olduğunu qəbul edərək, $O\vec e_1\vec e_2$ koordinat sitemindən $O'\vec e_1'\vec e_2'$ koordinat sisteminə keçid düsturlarını yazın.

Cavab: $\begin{aligned} x &= -x' - y' + 1, \\ y &= x'. \end{aligned}$

2. Koordinatların $x = x' - 3y'$, $y = x' + y' + 1$ çevirməsinə əsasən yeni koordinat başlanğıcının və koordinat vektorlarının koordinatlarını təyin edin:

Cavab: $\vec{e}_1'(1,1), \vec{e}_2'(-3,1), O'(0,1)$.

3. Bir təpəsi polyusda yerləşən, digər təpələri isə $\left(4, \frac{\pi}{9}\right), \left(1, \frac{5\pi}{18}\right)$ polyar koordinatları ilə verilən üçbucağın sahəsini hesablayın.

Cavab: 1.

4. Təpələri $A\left(3, \frac{\pi}{8}\right), B\left(8, \frac{7\pi}{24}\right), C\left(6, \frac{5\pi}{8}\right)$ nöqtələrində olan üçbucağın sahəsini tapın.

Cavab: $3\left(4\sqrt{3} - 1\right)$.

5. Polyar koordinat sistemində $A\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right)$ və $B\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$ nöqtələri verilmişdir. A və B nöqtələrini birləşdirən parçanın orta nöqtəsinin polyar koordinatlarını tapın.

Cavab: $\left(1, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

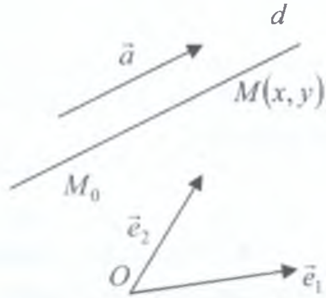
III FƏSİL

MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ DÜZ XƏTT

§ 7. Müstəvi üzərində düz xətt tənlikləri. Düz xəttin ümumi tənliyi. Düz xəttə nəzərən yarımmüstəvilər

1. Verilmiş düz xəttə paralel olan istənilən vektor onun *yönəldici*, yaxud *istiqamətverici vektoru* adlanır. Düz xəttin vəziyyəti bu düz xəttin yönəldici vektorunun və müəyyən nöqtəsinin, yaxud iki nöqtəsinin verilməsi ilə birqiymətli təyin olunur.

Tutaq ki, müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemi seçilmişdir və bu sistemdə d düz xəttinin müəyyən $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinin və yönəldici $\vec{a}(a_1, a_2)$ vektorunun koordinatları məlumdur(şək. 19). d düz xəttinin tənliyini yazaq. Aşkardır ki, $M(x, y)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $\overline{M_0M}$ və $\vec{a}$ vektorları kollinear olduqda d düz xəttinə aid olar. $\overline{M_0M}$ vektorunun $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinat sistemində $(x - x_0, y - y_0)$ koordinatları olduğundan, $\overline{M_0M}$ və $\vec{a}$ vektorlarının kollinearlıq şərtini belə yaza bilərik:



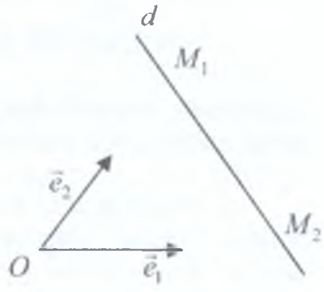
Şəkil 19

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 \\ y - y_0 & a_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

M nöqtəsi d düz xətti üzərində yerləşdikdə onun koordinatları (1) tənliyini ödəyirlər və bu nöqtə d düz xətti üzərində yerləşmədikdə isə onun koordinatları (1) tənliyini ödəmirlər, ona görə də (1) tənliyi d düz xəttinin tənliyidir. (1) tənliyini bu şəkildə də yazmaq olar:

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0. \qquad (2)$$

2. İki nöqtəsi ilə verilən düz xəttin tənliyini çıxaraq. Tutaq ki, $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində d düz xəttinin $M_1(x_1, y_1)$ və $M_2(x_2, y_2)$ nöqtələrinin koordinatları məlumdur (şək. 20). Onda $\overline{M_1M_2}$ vektoru d düz xəttinin yönəldici vektorudur. Bu vektor $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ koordinatlarına malikdir. Ona görə də (1) düsturuna əsasən d düz xəttinin tənliyi aşağıdakı kimi yazılar:



Şəkil 20

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

$x_2 - x_1 \neq 0$ və $y_2 - y_1 \neq 0$ olduqda (3) tənliyini bu şəkildə də yazmaq olar:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4}$$

3. Tutaq ki, müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemi seçilmiş və *ordinat oxunu kəsən* d düz xətti verilmişdir. Əgər $\vec{a}(a_1, a_2)$- d düz xəttinin yönəldici vektorudursa, onda $\vec{a}$ və $\vec{e}_2$ kollinear olmayan vektorlardır, ona görə də $a_1 \neq 0$. $k = \dfrac{a_2}{a_1}$ ədədi *d düz xəttinin bucaq əmsalı adlanır.* Göstərək ki, bucaq əmsalı düz xəttin yönəldici vektorunun seçimindən asılı deyil. Doğrudan da, əgər $\vec{b}(b_1, b_2)$ d düz xəttinin digər yönəldici vektorudursa, onda $\vec{a} \| \vec{b}$ və ona görə də $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının koordinatları mütəna-sibdirlər: $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$. Buradan $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ şərtlərinə əsa-sən alarıq:

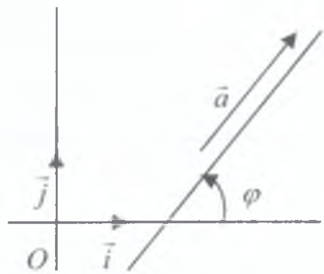
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\lambda b_2}{\lambda b_1} = \frac{b_2}{b_1}.$$

d düz xətti $O\vec{i}\vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sistemində verildikdə k bucaq əmsalı daha sadə həndəsi mənaya malik olur. Doğrudan da, tutaq ki, $\vec{a}(a_1, a_2)$ – bu düz xəttin yönəldici vektorudur. Onda § 6-dakı teorem 1-ə əsasən

$$a_1 = |\vec{a}|\cos\varphi, a_2 = |\vec{a}|\sin\varphi,$$

burada $\varphi = (\vec{i} \wedge \vec{a})$ (şək. 21). Ona görə də

$$k = \frac{|\vec{a}|\sin\varphi}{|\vec{a}|\cos\varphi} = tg\varphi.$$ Beləliklə, k ədədi $\varphi = (\vec{i} \wedge \vec{a})$ istiqamətlənmiş bucağını təyin etməyə imkan verir.



Şəkil 21

Tutaq ki, k - $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində verilmiş d düz xəttinin bucaq əmsalıdır. Aşkardır ki, koordinatları $k = \frac{p_2}{p_1}$ bərabərliyini ödəyən istənilən sıfırdan fərqli $\vec{p}(p_1, p_2)$ vektoru d düz xəttinin yönəldici vektorudur. Ona görə də k ədədi məlum olduqda d düz xəttinin istiqamətini və bu düz xəttin hər hansı M_0 nöqtəsi verildikdə isə onun vəziyyətini təyin etmək mümkündür.

$O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi və k bucaq əmsalı ilə verilən düz xəttin tənliyini yazaq. Tutaq ki, $\vec{a}(a_1, a_2)$ – düz xəttin yönəldici vektorudur. (2) düsturuna əsasən düz xəttin tənliyi $a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0$ şəklindədir. Buradan a_1 ədədinə bölməklə alarıq:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{5}$$

Əgər $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi olaraq d düz xəttinin ordinat oxu ilə $B(0, b)$ kəsişmə nöqtəsini götürsək, onda (5) tənliyi belə yazılır:

$$y = kx + b. \tag{6}$$

(6) tənliyi *düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi* adlanır. Qeyd edək ki, ordinat oxunu kəsən istənilən düz xəttin tənliyini (6) şəklində yazmaq olar.

4. Müstəvi üzərində hər hansı $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemini seçək. Tutaq ki, d - yönəldici vektoru $\vec{a}(a_1, a_2)$ vektoru olan və $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən düz xəttdir. $M(x, y)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $\overline{M_0 M} \parallel \vec{a}$ olduqda, yəni müəyyən t ədədi üçün $\overline{M_0 M} = t\vec{a}$ bərabərliyi ödənildikdə d düz xəttinə aid olur. Bu münasibəti koordinatlarla $x - x_0 = ta_1, y - y_0 = ta_2$ və ya

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta_1, \\ y &= y_0 + ta_2. \end{aligned} \tag{7}$$

şəklində yaza bilərik. Bu bərabərliklər *düz xəttin parametrik tənlikləri, t* isə onun *parametri* adlanır. (7) parametrik tənliklərinin mahiyyəti aşağıdakılardan ibarətdir: istənilən t ədədi üçün x, y koordinatları (7) şərtlərini ödəyən nöqtə d düz xəttinin üzərində yerləşir. Tərsinə, əgər $(x, y) - d$ düz xəttinin nöqtəsidirsə, onda (7) bərabərliklərini ödəyən t ədədi vardır.

5. Yuxarıdakı mühakimələr göstərir ki (bax (2) tənliyi), istənilən düz xəttin afin koordinat sistemində tənliyi bir dərəcəli tənlikdir, yəni

$$Ax + By + C = 0 \tag{9}$$

şəklində yazıla bilər, burada A və B eyni vaxtda sıfra bərabər olmayan ədədlərdir.

Tərs hökmün doğruluğunu isbat edək.

Teorem 1. *Afin koordinat sistemində (9) bir dərəcəli tənliyi ilə verilən xətt düz xəttdir.* $(-B, A)$ *vektoru bu düz xəttin yönəldici vektorudur.*

İsbatı. Tutaq ki, $\gamma - (9)$ tənliyi ilə verilən düz xətdir, $M_0(x_0, y_0)$ isə onun müəyyən nöqtəsidir. Bu o deməkdir ki, $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinin koordinatları (9) tənliyini ödəyirlər:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \tag{10}$$

C əmsalını (10) bərabərliyindən təyin edib, (9) tənliyində yerinə yazmaqla, γ xəttinin $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$ və ya $A(x - x_0) - (-B)(y - y_0) = 0$ şəklində tənliyini alırıq. Bu tənlik (2) şəklində olan tənlikdir, ona görə də $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən və yönəldici vektoru $\vec{a}(-B,A)$ olan düz xətti təyin edir. ■

Beləliklə afin koordinat sistemində istənilən bir dərəcəli (9) tənliyi düz xətt təyin edir. (9) tənliyinə *düz xəttin ümumi tənliyi* deyilir. Düz xəttin ümumi tənliyinin xüsusi hallarını qeyd edək.

1) $C=0$ olduqda $O(0,0)$ nöqtəsinin koordinatları (9) tənliyini ödəyirlər, ona görə də düz xətt koordinat başlanğıcından keçir. Tərsinə, düz xətt koordinat başlanğıcından keçdiyi halda $C=0$ olur. Beləliklə, *(9) düz xətti yalnız və yalnız $C=0$ olduqda koordinat başlanğıcından keçir.* Bu halda düz xəttin tənliyi $Ax+By=0$ şəklində olur.

2) $A=0$ olduqda düz xəttin yönəldici $\vec{a}(-B,0)$ vektoru $\vec{e}_1$ koordinat vektoruna kollinear olur, bu isə $\vec{e}_1$ vektorunun düz xəttə paralel olması deməkdir. Tərsinə, əgər $\vec{a}\parallel\vec{e}_1$ olarsa, onda

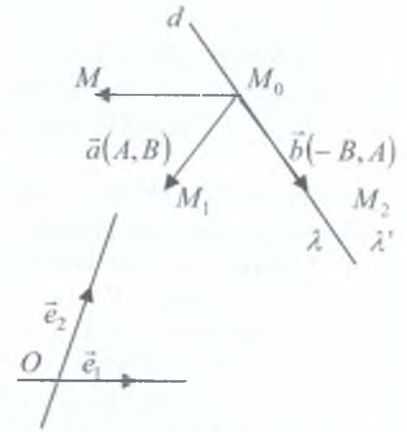
$\begin{vmatrix} -B & A \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow A=0.$ Beləliklə, *$\vec{e}_1$ vektoru yalnız və yalnız $A=0$ olduqda (9) düz xəttinə paralel olur.* Bu halda düz xəttin tənliyi $By+C=0$ və ya $y=b$ şəklində olur, burada $b=-\dfrac{C}{B}$.

$A=0, B\neq 0$ olduqda, (9) düz xətti koordinat başlanğıcından keçmir və ona görə də Ox oxuna paralel olur; $A=C=0$ olduqda isə düz xətt Ox oxuna paralel olur və tənliyi $y=0$ şəklində yazılır.

3) Analoji olaraq $\vec{e}_2$ vektoru yalnız və yalnız $B=0$ olduqda (9) düz xəttinə paralel olur. $B=0, C\neq 0$ olduqda düz xətt Oy oxuna paraleldir və $B=C=0$ olduqda isə Oy oxu ilə üst-üstə düşür və tənliyi $x=0$ şəklində yazılır.

6. Müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemini daxil edək və bu sistemdə (9) tənliyi ilə verilən d düz xəttinə baxaq. d düz xətti müstəvinin həmin düz xəttə aid olmayan nöqtələr çoxluğunu iki yarımmüstəviyə ayırır. Bu yarımmüstəviləri təyin edən şərtləri müəyyənləşdirək. d düz xətti üzərində müəyyən $M_0(x_0,y_0)$ nöqtəsini qeyd edərək, $\vec{a}(A,B)$ və $\vec{b}(-B,A)$ vektorlarına baxaq (şək. 22).

$\begin{vmatrix} A - B \\ B \quad A \end{vmatrix} = A^2 + B^2 > 0$ olduğundan, bu vektorlar sağ bazis təyin edirlər. $\vec{b}$ vektoru d düz xəttinə paralel olduğundan $\vec{a}$ vektoru bu düz xəttə paralel deyil. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını M_0 nöqtəsindən ayıraq: $\overline{M_0M_1} = \vec{a}$ və $\overline{M_0M_2} = \vec{b}$. Sərhəddi d düz xətti olan və M_1 nöqtəsini



Şəkil 22

özündə saxlayan yarımmüstəvini λ ilə işarə edək (şək. 22). Aşkardır ki, $M(x,y)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $\vec{a},\vec{b}$ və $\overline{M_0M},\vec{b}$ bazislərinin oriyentasiyaları eyni olduqda, yəni $\overline{M_0M},\vec{b}$ bazisi sağ oriyentasiyaya malik olduqda λ yarımmüstəvisi üzərində yerləşir. Digər tərəfdən, $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ və $\vec{b}(-B,A)$ olduğundan $\overline{M_0M},\vec{b}$ bazisi yalnız və yalnız $\begin{vmatrix} x - x_0 & -B \\ y - y_0 & A \end{vmatrix} > 0$ və ya $Ax + By - (Ax_0 + By_0) > 0$ bərabərsizliyi ödənildikdə sağ oriyentasiyaya malik olur. $M_0 \in d$ olduğundan, $Ax_0 + By_0 + C = 0$ və ya $C = -(Ax_0 + By_0)$. Ona görə də yuxarıdakı bərabərsizlik bu şəkildə yazılır:

$$Ax + By + C > 0. \qquad (11)$$

(11) - λ yarımmüstəvisini təyin edən bərabərsizlikdir. Sərhəddi d düz xətti olan digər λ' yarımmüstəvisi isə

$$Ax + By + C < 0 \qquad (12)$$

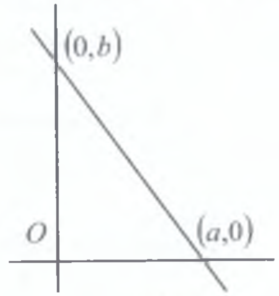
bərabərsizliyi ilə təyin olunur.

Beləklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2. *Əgər afin koordinat sistemində d düz xətti (9) tənliyi ilə verilmişdirsə, onda sərhəddi d düz xətti olan yarımmüstəvilər (11) və (12) bərabərsizlikləri ilə təyin olunurlar.*

Məsələ 1. $M(4,-3)$ nöqtəsindən elə düz xətt keçirin ki, bu düz xəttin koordinat oxları ilə əmələ gətirdiyi üçbucağın sahəsi 3 sahə vahidi olsun. Koordinat sistemi düzbucaqlıdır.

Həlli. Tutaq ki, verilmiş düz xətt koordinat oxlarını $A(a,0)$ və $B(0,b)$ nöqtələrində kəsir (şək. 23). Onda AOB üçbucağının sahəsini $\frac{1}{2}ab = 3$ şəklində təyin edə bilərik. Buradan $ab = 6$ münasibəti alınır. Verilmiş düz xəttin təntənliyini (4) düsturuna əsasən yaza bilərik:



Şəkil 23

$$\frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b} \text{ və ya } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

$M(4,-3)$ nöqtəsi verilmiş düz xətt üzərində yerləşdiyindən koordi-natları onun tənliyini ödəməlidirlər:

$$\frac{4}{a} + \frac{-3}{b} = 1, \text{ və ya } 4b - 3a - ab = 0.$$

Sonuncu bərabərlikdə $a = \frac{6}{b}$ əvəzləməsini aparaq:

$$4b - \frac{18}{b} - b = 0 \Rightarrow 2b^2 - 3b - 9 = 0 \Rightarrow b_1 = 3, b_2 = \frac{-3}{2} \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = -4.$$

Beləliklə, məsələnin şərtlərinə $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ və $\frac{x}{4} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = -1$ düz xətləri uyğundur.

Məsələ 2. a parametrinin hansı qiymətində $3ax - 8y + 13 = 0$ və $(a+1)x - 2ay - 21 = 0$ düz xətləri paralel olur?

Həlli. Verilmiş düz xətlərin yönəldici vektorları $\vec{p}(8,3a)$ və $\vec{q}(2a, a+1)$ vektorlarıdır. Bu düz xətlərin paralel olması üçün $\vec{p}(8,3a)$ və $\vec{q}(2a,a+1)$ vektorları kollinear olmalıdırlar,yəni

$$\frac{8}{2a} = \frac{3a}{a+1}$$

bərabərliyi ödənilməlidir. Buradan alırıq:

$$3a^2 - 4a - 4 = 0 \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = -\frac{2}{3}.$$

Məsələ 3. $M_1(-2,6)$ nöqtəsindən və $x-3y+1=0$ və $2x+4y=0$ tənlikləri ilə verilən düz xətlərin kəsişmə nöqtəsindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli. I ü s u l. $x-3y+1=0$ və $2x+4y=0$ düz xətlərinin $M_2(x,y)$ kəsişmə nöqtəsi tapılır və (4) düsturuna əsasən M_1M_2 düz xəttinin tənliyi yazılır.

II ü s u l. $x-3y+1=0$ və $2x+4y=0$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsindən keçən istənilən düz xəttin tənliyi

$$\lambda_1(x-3y+1)+\lambda_2(2x+4y)=0 \qquad (13)$$

şəklində yazılır, burada λ_1, λ_2 eyni vaxtda sıfra bərabər olmayan ədədlərdir. Müəyyənlik üçün $\lambda_1 \neq 0$ olduğunu fərz edək. Onda (13) bərabərliyinin hər iki tərəfini λ_1 ədədinə bölməklə

$$(x-3y+1)+\lambda(2x+4y)=0 \qquad (14)$$

tənliyini alırıq, burada $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_2}$ işarə olunmuşdur. Axtarılan düz xətt $M_1(-2,6)$ nöqtəsindən keçdiyindən bu nöqtənin koordinatları (14) tənliyini ödəməlidirlər:

$$(-2-3\cdot 6+1)+\lambda(2\cdot(-2)+4\cdot 6)=0 \Rightarrow \lambda = \frac{19}{20}.$$

λ dəyişəninin alınmış qiymətini (14) tənliyində yerinə yazaq:

$$(x-3y+1)+\frac{19}{20}(2x+4y)=0,$$

və ya

$$29x+8y+10=0.$$

Bu tənlik axtarılan düz xəttin tənliyidir.

Məsələ 4. $2x+5y-8=0$ və $x-3y+4=0$ düz xəttlərinin kəsişmə nöqtəsindən elə düz xətt keçirin ki, $(4,3)$ nöqtəsini öz üzərində saxlasın.

Həlli. Verilmiş düz xəttlərin kəsişmə nöqtəsindən keçən istənilən düz xəttin tənliyini $2x+5y-8+\lambda(x-3y+4)=0$ şəklində yazmaq olar. $(4,3)$ nöqtəsinin axtarılan düz xətt üzərində yerləşdiyini nəzərə alaq: $2\cdot 4+5\cdot 3-8+\lambda(4-3\cdot 3+4)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda = 15$. Buradan axtarılan düz xəttin tənliyini aşağıdakı kimi təyin edirik: $2x+5y-8+15(x-3y+4)=0 \Rightarrow 17x-40y+52=0$.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. $P(5,2)$ nöqtəsindən elə düz xətt keçirin ki, koordinat oxlarından bərabər parçalar ayırsın.

Cavab: $x+y=7$.

2. a sabitinin hansı qiymətində $(3a+2)x+(1-4a)y+8=0$ və $(5a-2)x+(a+4)y-7=0$ düz xəttləri bir-birinə perpendikulyar olar?

Cavab: $a_1=0, a_2=1$.

3. $M(2,-1)$ nöqtəsindən keçən və $4x-7y+12=0$ düz xəttinə paralel olan düz xəttin tənliyini yazın.

Cavab: $4x-7y-15=0$.

4. $2x-5y-1=0$ və $x+4y-7=0$ düz xəttlərinin kəsişmə nöqtəsindən elə düz xətt keçirin ki, $A(4,-3)$ və $B(-1,2)$ nöqtələri arasındakı parçanı $\lambda = \frac{2}{3}$ nisbətində bölsün.

Cavab: $2x-y-5=0$.

§ 8. İki düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti. Nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə. İki düz xətt arasında qalan bucaq

1. Hansı şərtlər daxilində

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (2)$$

tənliklərinin eyni bir düz xətti təyin etdiyini aydınlaşdıraq. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. (1) *və* (2) *tənliklərinin afin koordinat sistemində eyni bir düz xətti təyin etməsi üçün zəruri və kafi şərt bu tənliklərdəki əmsalların mütənasib olmasıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, (1) və (2) tənlikləri $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində eyni bir d düz xəttini təyin edirlər. § 7-dəki teorem 1-ə əsasən $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$ və $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$ vektorları d düz xəttinin yönəldici vektorlarıdır, ona görə də kollineardırlar. Bu isə o deməkdir ki, $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$ və $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$ vektorlarının koordinatları mütənasibdir:

$$-B_2 = \lambda(-B_1), A_2 = \lambda A_1, \text{ və ya } A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1.$$

Tutaq ki, $M_0(x_0, y_0) - d$ düz xəttinin nöqtəsidir. Onda

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0.$$

Buradan $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1$ şərtləri daxilində alırıq:

$$C_2 = \lambda(-A_1x_0 - B_1y_0) = \lambda C_1.$$

Beləliklə,

$$A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1. \quad (3)$$

Tərsinə, tutaq ki, (1) və (2) tənliklərində əmsallar (3) bərabərliklərini ödəyirlər. A_2 və B_2 əmsalları eyni vaxtda sıfra bərabər olmadığından, bu halda $\lambda \neq 0$. Ona görə də (2) tənliyini

$$\lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1 = 0 \quad (4)$$

şəklində yazmaq olar. Əgər nöqtənin (x, y) koordinatları (1) tənliyini ödəyirlərsə, onda bu koordinatlar (4) tənliyini də ödəyirlər. Bu isə o deməkdir ki, (1) və (4) tənlikləri ilə eyni bir düz xətt təyin olunur. ■

Müəyyən Oe_1e_2 afin koordinat sistemində (1) və (2) tənlikləri ilə verilmiş d_1 və d_2 düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyəti ilə bağlı məsələyə baxaq. Qeyd etdiyimiz kimi, $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$ vektoru d_1 düz xəttinə, $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$ vektoru isə d_2 düz xəttinə paraleldir. İki hal mümkündür.

1) *$\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ kollinear olmayan vektorlardır.* Bu halda d_1 və d_2 düz xətləri kəsişirlər. Tərsinə, əgər d_1 və d_2 düz xətləri kəsişirlərsə, onda $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ kollinear olmayan vektorlardır. $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ vektorlarının kollinear olmaması şərtini $\begin{vmatrix} -B_1 & -B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0$, və ya $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ şəklində yazmaq olar. Bu düz xətlərin kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını təyin etmək üçün (1) , (2) tənliklər sistemini həll etmək lazımdır.

2) *$\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ vektorları kollineardırlar.* Bu halda verilmiş düz xəttlər paralel olur (bu düz xətlərin üst-üstə düşməməsi fərz edilir). Tərsinə, əgər d_1 və d_2 düz xətləri paraleldirlərsə, onda $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ kollinear vektorlardır. $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ vektorlarının kollinearlıq şərti belə yazılır:

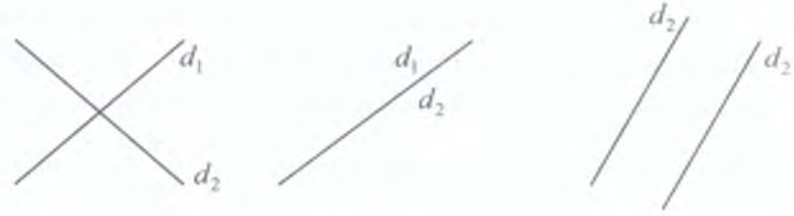
$$\begin{vmatrix} -B_1 & -B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = 0\text{, və ya } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Beləliklə, (1) və (2) tənlikləri ilə verilmiş d_1 və d_2 düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyəti ilə bağlı aşağıdakı nəticəni qeyd edə bilərik:

a) d_1 və d_2 düz xətləri yalnız və yalnız (1) və (2) tənliklərində x və y dəyişənlərinin əmsalları mütənasib olmadıqda kəsişirlər (şək. 24, a).

b) d_1 və d_2 düz xətləri yalnız və yalmz (1) və (2) tənliklərinin bütün əmsalları mütənasib olduqda, yəni müəyyən λ ədədi üçün $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$ şərtləri ödənildikdə üst-üstə düşürlər (şək. 24, b).

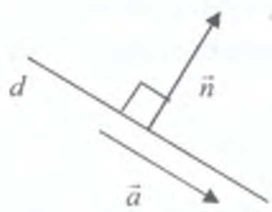
c) d_1 və d_2 düz xətləri yalnız və yalnız (1) və (2) tənliklərində x və y dəyişənlərinin əmsalları mütənasib olduqda, lakin sərbəst əmsallar onlara mütənasib olmadıqda, yəni müəyyən λ ədədi üçün $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 \neq \lambda C_1$ şərtləri ödənildikdə paralel olurlar (şək. 24, c).



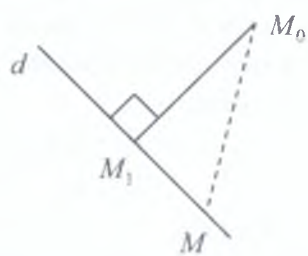
a) b) c)

Şəkil 24

2. Düz xəttin istənilən yönəldici vektoruna perpendikulyar olan sıfırdan fərqli $\vec{n}$ vektoru bu düz xəttə *perpendikulyar olan vektor* adlanır (şək. 25). Verilmiş düz xəttə perpendikulyar olan sonsuz sayda vektorlar vardır. Aşağıdakı lemma doğrudur.



Şəkil 25



Şəkil 26

Lemma. *Əgər d düz xətti düzbucaqlı koordinat sistemində*

$$Ax + By + C = 0 \tag{5}$$

tənliyi ilə verilmişdirsə, onda $\vec{n}(A,B)$ vektoru d düz xəttinə perpendikulyardır.

İsbatı. $\vec{a}(-B,A)$ vektoru d düz xəttinin yönəldici vektorudur. Lakin $\vec{a}\vec{n} = (-B)A + A \cdot B = 0$ olduğuna görə $\vec{n}$ və $\vec{a}$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyardırlar. Buradan $\vec{n}$ vektorunun d düz xəttinə perpendikulyar olması alınır. ■

Tutaq ki, $M_0 - d$ düz xəttinə aid olmayan nöqtədir. M_0 nöqtəsindən d düz xəttinə çəkilən M_0M_1 perpendikulyarının uzunluğu M_0 *nöqtəsindən d düz xəttinə qədər olan məsafə* adlanır (şək. 26). $M_0 \in d$ olduqda M_0 nöqtəsindən d düz xəttinə qədər olan məsafə sıfır qəbul edilir. Müstəvinin ixtiyari M_0 nöqtəsindən d düz xəttinə qədər olan məsafə $\rho(M_0, d)$ kimi işarə olunur. Aşkardır ki, d düz xəttinin istənilən M nöqtəsi üçün $\rho(M_0, d) \le M_0M$ münasibəti doğrudur (şək. 26).

Tutaq ki, düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi və (5) tənliyi ilə d düz xətti verilmişdir. $\rho(M_0, d)$ məsafəsini hesablayaq.

Fərz edək ki, $M_0M_1 - M_0$ nöqtəsindən d düz xəttinə çəkilən perpendikulyardır. Onda $\rho(M_0, d) = \left|\overline{M_1M_0}\right|$. İsbat etdiyimiz lemmaya əsasən $\vec{n}(A, B)$ vektoru d düz xəttinə perpen-dikulyardır və buna görə də $\overline{M_1M_0}$ vektoruna kollineardır. Vektorların skalyar hasılı əməlinin tərifinə görə yaza bilərik:

$$\overline{M_1M_0} \cdot \vec{n} = \left|\overline{M_1M_0}\right| |\vec{n}| \cdot \cos\left(\overline{M_1M_0} \,\hat{}\, \vec{n}\right) = \rho(M_0, d)\, |\vec{n}| (\pm 1).$$

Beləliklə,

$$\rho(M_0, d) = \frac{\left|\overline{M_1M_0} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|}. \tag{6}$$

$\overline{M_1M_0} \cdot \vec{n}$ skalyar hasilini hesablayaq. Tutaq ki, $(x_1, y_1) - M_1$ nöqtəsinin koordinatlarıdır. Onda $\overline{M_1M_0}$ vektoru

$$\overline{M_1M_0}\ (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$$

koordinatlarına malikdir. Buradan aydın olur ki,

$$\overline{M_1M_0}\cdot\vec{n} = (x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1).$$

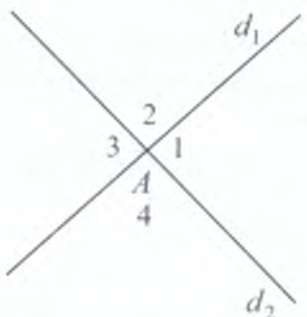
$M_1 \in d$ olduğuna görə, $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Beləliklə,

$$\overline{M_1M_0}\cdot\vec{n} = Ax_0 + By_0 + C.$$

Əgər $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$ olduğunu nəzərə alsaq, (6) düsturundan yaza bilərik:

$$\rho(M_0, d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (7)$$

3. Müstəvi üzərində A nöqtəsində kəsişən iki d_1 və d_2 düz xətlərinə baxaq. Bu düz xətlərin A nöqtəsindən çıxan şüaları cüt-cüt qarşılıqlı olan elə dörd $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ bucaqlarını əmələ gətirirlər ki, $\angle 1 = \angle 3$ və $\angle 2 = \angle 4$ (şək.27). Məktəb həndəsə kursundan məlum olduğu kimi, d_1 və d_2 düz xətləri arasında qalan bucaq dedikdə bu bucaqlar içərisində kiçik olanının kəmiyyəti başa düşülür. Buradan aydın olur ki, iki kəsişən düz xətt arasında qalan bucaq $\frac{\pi}{2}$-dən böyük deyil.



Şəkil 27

İndi isə oriyentasiya olunmuş müstəvi üzərində iki kəsişən düz xətt arasında qalan istiqamətlənmiş bucaq anlayışını daxil edək. Müəyyən nizamla verilmiş kəsişən d_1 və d_2 düz xətlərinə baxaq: d_1-birinci düz xətdir, d_2 isə ikinci düz düz xəttdir. d_1 və d_2 düz xətlərinin $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ yönəldici vektorlarını elə seçək ki, $(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \le \frac{\pi}{2}$ olsun. $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ vektorları arasındakı istiqamətlənmiş bucaq, yəni $(\vec{a}_1\,\hat{}\,, \vec{a}_2)$ kəmiyyəti d_1 düz xətti ilə d_2 düz xətti arasındakı *istiqamətlənmiş* *bucaq* adlanır. Beləliklə, istənilən kəsişən iki düz xətt arasındakı istiqamətlənmiş φ bucağı $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ şərtini ödəyir. Qeyd edək ki, d_1 və d_2 düz xətləri perpendikulyar olmadıqda, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ şərti ödənilir, bu düz xətlər perpendikulyar olduqda isə ya $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ya da $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ olur.

Ortonormallaşmış $\vec{i}, \vec{j}$ bazisində d_1 və d_2 düz xətlərinin ixtiyari yönəldici vektorlarının $\vec{a}(a_1, a_2)$ və $\vec{b}(b_1, b_2)$ koordinatlarını bilərək, bu düz xətlər arasındakı istiqamətlənmiş φ bucağını tapaq. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları perpendikulyar olduqda, yəni $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ şərti ödənildikdə d_1 və d_2 düz xətləri perpendikulyar olurlar, ona görə də bu halda ya $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ya da $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ olur.

d_1 və d_2 düz xətlərinin perpendikulyar olmadığı hala, $a_1b_1 + a_2b_2 \ne 0$ halına baxaq. Göstərək ki, bu halda

$$tg\varphi = tg(\vec{a}\,\hat{}\,, \vec{b}). \qquad (8)$$

Doğrudan da, əgər $(\vec{a}, \vec{b}) < \frac{\pi}{2}$ olarsa, onda tərifə görə $\varphi = (\vec{a}\,\hat{}\,, \vec{b})$, yəni (8) bərabərliyi doğrudur. $(\vec{a}, \vec{b}) > \frac{\pi}{2}$ olduqda isə aşkardır ki, $(\vec{a}, (-\vec{b})) < \frac{\pi}{2}$, ona görə də $\varphi = (\vec{a}\,\hat{}\,, (-\vec{b}))$. § 6-dakı (2) düsturlarından istifadə etsək, yaza bilərik:

$$tg\varphi = tg(\vec{a}\,\hat{}\,, (-\vec{b})) = tg((\vec{a}\,\hat{}\,, \vec{b}) + (\vec{b}\,\hat{}\,, (-\vec{b}))) = tg((\vec{a}\,\hat{}\,, \vec{b}) + \pi) =$$
$$= tg(\vec{a}\,\hat{}\,, \vec{b}).$$

Əgər $(\vec{i},\vec{a})=\varphi_1, (\vec{i},\vec{b})=\varphi_2$ işarə etsək, onda § 6-dakı (2) düsturlarına əsasən

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2\sin\varphi_1, \\ \sin\varphi &= \sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1 \end{aligned} \tag{9}$$

düsturlarım alarıq. Qeyd olunan § 6-dakı teorem 1-dən istifadə etməklə müəyyən edirik ki,

$$a_1 = |\vec{a}|\cos\varphi_1, a_2 = |\vec{a}|\sin\varphi_1, b_1 = |\vec{b}|\cos\varphi_2, b_2 = |\vec{b}|\sin\varphi_2.$$

Bu düsturları (9) bərabərliklərində nəzərə alsaq,

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \quad \sin\varphi = \frac{a_1b_2 - b_1a_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

düsturlarını, və ya

$$tg\varphi = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{a_1b_1 + a_2b_2} \tag{10}$$

düsturunu yaza bilərik.

4. Fərz edək ki, kəsişən d_1 və d_2 düz xəttləri düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində ümumi tənlikləri ilə verilmişdir:

$$\begin{aligned} d_1: &\quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ d_2: &\quad A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned}$$

§ 7-dəkı teorem 1-ə əsasən, bu düz xətlərin yönəldici vektorlarının $\vec{a}_1(-B_1, A_1), \vec{a}_2(-B_2, A_2)$ koordinatları vardır. İki hal mümkündür.

1) $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$. Bu halda d_1 və d_2 düz xəttləri perpendikulyardırlar, yəni ya $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ya da $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = = (-B_1)(-B_2) + A_1A_2 = A_1A_2 + B_1B_2$ olduğuna görə,

d_1 və d_2 düz xəttləri yalnız və yalnız

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \tag{11}$$

olduqda perpendikulyardırlar.

2) $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \neq 0$. d_1 və d_2 düz xətləri arasındakı istiqamətlənmiş φ bucağı (10) düsturu ilə hesablanır:

$$tg\varphi = \frac{-B_1A_2 + A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2},$$

və ya

$$tg\varphi = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1A_2 + B_1B_2}. \qquad (12)$$

İndi isə fərz edək ki, d_1 və d_2 düz xətləri bucaq əmsallı tənliklərlə verilmişdir:

$$d_1: \quad y = k_1x + b_1,$$

$$d_2: \quad y = k_2x + b_2.$$

Bu düz xətlərin yönəldici vektorlarının $\vec{a}_1(1, k_1)$ və $\vec{a}_2(1, k_2)$ koordinatları vardır, ona görə də verilmiş düz xətlərin perpendikulyarlıq şərti belə yazılır:

$$k_1k_2 + 1 = 0. \qquad (13)$$

İstiqamətlənmiş $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$ bucağı (10) düsturu ilə hesablanır:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (14)$$

Məsələ 1. $M(2,-1)$ nöqtəsindən $4x - 7y + 12 = 0$ düz xəttinə paralel keçən düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli. Verilmiş $4x - 7y + 12 = 0$ düz xəttinin yönəldici vektoru $\vec{a}(-B, A) = \vec{a}(7,4)$ vektorudur. Onda axtarılan düz xəttin yönəldici vektoru olaraq $\vec{a}_1(-\lambda B, \lambda A) = \vec{a}_1(7\lambda, 4\lambda)$ vektorunu götürə bilərik. Aşkardır ki, $M(2,-1)$ nöqtəsindən keçən və yönəldici vektoru $\vec{a}_1(7\lambda, 4\lambda)$ vektoru olan düz xətt axtarılan düz xətdir. Bu düz xəttin tənliyini yazmaq üçün § 7-də verilən (2) düsturundan istifadə edək:

$$(x-2)\cdot 4\lambda = (y-(-1))\cdot 7\lambda$$

və ya

$$4x-7y-15=0.$$

Məsələ 2. $7x-y+3=0$ və $3x+5y-4=0$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsindən elə düz xətt keçirin ki, $x+2y-4=0$ düz xəttinə paralel olsun.

Həlli. Verilmiş iki düz xəttin kəsişmə nöqtəsindən keçən istənilən düz xəttin tənliyi

$$7x-y+3+\lambda(3x+5y-4)=0 \qquad (15)$$

şəklindədir. λ parametrini elə seçək ki, verilmiş düz xətt $x+2y-4=0$ düz xəttinə paralel olsun. Bundan ötrü x və y dəyişənlərinin uyğun əmsalları mütənasib olmalıdırlar:

$$\frac{7+3\lambda}{1}=\frac{7+5\lambda}{2} \Rightarrow \lambda=-7.$$

Parametrin $\lambda=-7$ qiymətini (15) tənliyində nəzərə alaq:

$$7x-y+3-7(3x+5y-4)=0$$

və ya

$$14x+36y-31=0. \qquad (16)$$

(16) tənliyi axtarılan düz xəttin tənliyidir.

Məsələ 3. Göstərin ki, $3x-4y+10=0$ və $6x-8y+$ $+15=0$ düz xəttləri paraleldirlər və bu düz xətlər arasındakı məsafəni tapın.

Həlli. Əvvəlcə verilmiş düz xətlərin paralel olub-olmadıqlarını aydınlaşdıraq:

$$\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8}\neq\frac{10}{15}.$$

Beləliklə, verilmiş düz xətlər paraleldirlər. $O(0,0)$ koordinat başlanğıcından verilmiş düz xətlərə qədər olan məsafələri uyğun olaraq, p_1 və p_2 ilə işarə edək. Aşkardır ki, verilmiş düz xətlərin koordinat başlanğıcından eyni tərəfdə və ya əks tərəflərdə yerləşməyindən asılı olaraq, axtarılan d məsafəsi $d=|p_1 \mp p_2|$ düsturu ilə hesablanar. (7) məsafə düsturundan istifadə edərək, p_1 və p_2 məsafələrini hesablayaq:

$$p_1 = \frac{10}{\sqrt{9+16}} = 2, p_2 = \frac{15}{\sqrt{36+64}} = \frac{3}{2}.$$

Verilmiş düz xətlərin $O(0,0)$ koordinat başlanğıcına nəzərən vəziyyətlərini müəyyən edək:

$$3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 10 > 0, \quad 6 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 15 > 0.$$

Beləliklə, verilmiş düz xətlər koordinat başlanğıcına nəzərən eyni tərəfdədirlər. Onda $d = \left|2 - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Məsələ 4. Koordinat başlanğıcından 5 vahid məsafədə yerləşən elə düz xətt tapın ki, o, $8x + 5y - 39 = 0$ düz xəttinin absisi $x = -2$ olan nöqtəsindən keçsin.

Həlli. Əvvəlcə $8x + 5y - 39 = 0$ düz xəttinin absisi $x = -2$ olan nöqtəsini tapaq: $8 \cdot (-2) + 5y - 39 = 0 \Rightarrow y = 11$. Deməli, bu nöqtə $M(-2,11))$ nöqtəsidir. Onda axtarılan düz xəttin bucaq əmsallı tənliyini belə yaza bilərik (bax § 7, (5) düsturu):

$$y - 11 = k(x + 2),$$

və ya

$$kx - y + 2k + 11 = 0. \tag{17}$$

Axtarılan düz xəttin koordinat başlanğıcından 5 vahid məsafədə olduğunu nəzərə alaq:

$$\frac{|2k + 11|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 5,$$

və ya $21k^2 - 44k - 96 = 0$. Buradan $k_1 = -\frac{4}{3}, k_2 = \frac{24}{7}$ qiymətləri alınır. Bu qiymətləri (17) tənliyində nəzərə almaqla müəyyən edirik ki, $4x + 3y - 25 = 0$ və $24x - 7y + 125 = 0$ düz xətləri axtarılan düz xətlərdir.

Məsələ 5. Koordinat başlanğıcından elə düz xətt keçirin ki, $y = 2x + 5$ düz xətti ilə əmələ gətirdiyi bucaq 45^0 olsun.

Həlli. Tutaq ki, axtarılan düz xəttin bucaq əmsalı k_1 – dir. Verilənlərə görə digər düz xəttin bucaq əmsalı $k_2 = 2$ ədədidir. Onda (14) düsturunu tətbiq etməklə, yaza bilərik:

$$tg45^0 = 1 = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - k_1}{1 + 2k_1},$$

buradan $k_1 = \frac{1}{3}$ olduğunu alırıq. Beləliklə axtarılan düz xətt

$$y = k_1 x,$$

və ya $y = \frac{1}{3}x$ düz xəttidir.

Sərbəst həll eimək üçün məsələlər

1. Hipotenuzun $y = 3x + 5$ tənliyini və $(4,-1)$ düz bucaq təpəsini bilərək, bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucağın katetlərinin tənliyini yazın.

Cavab: $y = -2x + 7$ və $y = \frac{1}{2}x - 3$.

2. $A(-5,2)$ nöqtəsindən $4x - y + 3 = 0$ düz xəttinə çəkilən perpendikulyar düz xəttin tənliyini yazın.

Cavab: $x + 4y - 3 = 0$.

3. $12x + 5y - 52 = 0$ düz xətti verilmişdir. Bu düz xəttə paralel olan və ondan 2 vahid məsafədə yerləşən düz xəttin tənliyini yazın.

Cavab: $12x + 5y - 26 = 0$ və $12x + 5y - 78 = 0$.

4. $3x + 4y - 10 = 0$ və $5x - 12y + 26 = 0$ düz xəttləri verilmişdir. Hər iki düz xətdən eyni $d = 2$ məsafəsində olan nöqtəni tapın.

Cavab: $M(1,8)$.

5. Tərəflərinin düzbucaqlı koordinat sistemindəki $18x + 6y - 17 = 0$, $14x - 7y + 15 = 0$ və $5x + 10y - 9 = 0$ tənliklərini bilərək, üçbucağın bucaqlarını tapın.

Cavab: $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$.

IV FƏSİL

İKİTƏRTİBLİ XƏTLƏR

§ 9. Ellips

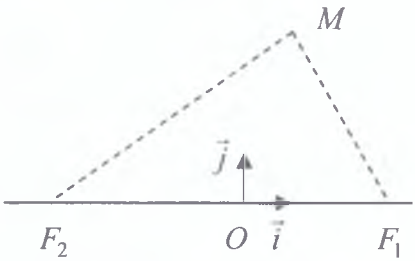
1. Müstəvi üzərində verilmiş F_1 və F_2 nöqtələrindən məsafələrinin cəmi $PQ > F_1F_2$ şərtini ödəyən verilmiş PQ parçasının uzunluğuna bərabər olan bütün nöqtələr çoxluğuna *ellips* deyilir.

F_1 və F_2 nöqtələrinə ellipsin *fokusları*, onlar arasındakı məsafəyə -*fokal məsafə* deyilir.

Əgər M – ellipsin nöqtəsidirsə, onda F_1M və F_2M parçaları M nöqtəsinin *fokal radiusları* adlanır. F_1M və F_2M parçalarının uzunluqlarına da M nöqtəsinin fokal radiusları deyilir. Tutaq ki, $F_1F_2 = 2c, PQ = 2a$. $PQ > F_1F_2$ olduğundan, $a > c$.

Ellipsin tərifindən aydın olur ki, F_1 və F_2 nöqtələri üst-üstə düşdükdə ellips a radiuslu çevrə olur. Bu halda ellipsin fokusları çevrənin mərkəzi ilə üst-üstə düşürlər.

Düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində γ ellipsinin tənliyini yazaq, burada $O - F_1F_2$ parçasının orta nöqtəsidir və $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OF_1}$ (şək. 28). Seçilmiş koordinat sistemində F_1 və F_2 fokuslarının $F_1(c,0)$ və $F_2(-c,0)$ koordinatları vardır, ona görə də ellipsin ixtiyari $M(x,y)$ nöqtəsinin fokal radiuslarının aşağıdakı ifadələrini yaza bilərik:



Şəkil 28

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \tag{1}$$

Ellipsin tərifinə görə, $F_1M + F_2M = 2a$. Buradan aydın olur ki,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Bu tənliyi

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (2)$$

şəklində yazaq. (2) tənliyini kvadrata yüksəltsək və oxşar hədləri islah etsək, alarıq:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Bu tənliyi bir daha kvadrata yüksəldib, sadə çevirmələr aparsaq, onu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

şəklinə gətirmiş olarıq, burada

$$b^2 = a^2 - c^2. \qquad (4)$$

Beləliklə, göstərdik ki, γ ellipsinin istənilən nöqtəsinin koordinatları (3) tənliyini ödəyirlər. Tərs hökmün doğruluğunu isbat edək: koordinatları (3) tənliyini ödəyən hər bir M nöqtəsi γ ellipsinə aiddir, yəni $F_1M + F_2M = 2a$. (1) düsturlarında y^2 – nın (3) tənliyindən olan qiymətini yerinə yazaq və (4) bərabərliyini nəzərə alaq:

$$F_1M = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|, \quad F_2M = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|.$$

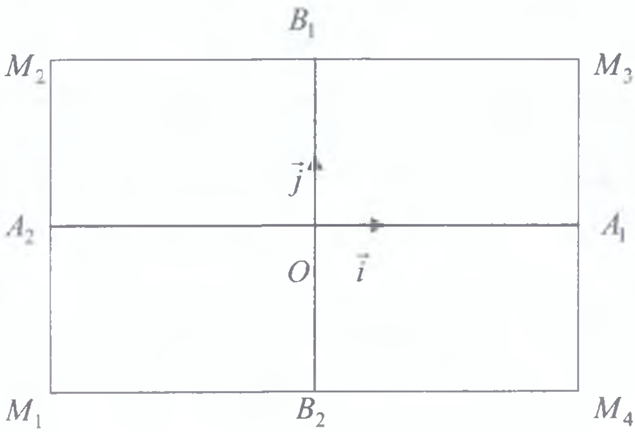
(3) tənliyindən alınır ki, $|x| \le a$. Bu münasibət və $0 < \frac{c}{a} < 1$ şərti göstərir ki, $a - \frac{c}{a}x > 0, a + \frac{c}{a}x > 0$, ona görə də

$$F_1M = a - \frac{c}{a}x, \quad F_2M = a + \frac{c}{a}x. \qquad (5)$$

Beləliklə, $F_1M + F_2M = 2a$, yəni $M \in \gamma$. Buradan belə bir nəticəyə gəlirik ki, (3) tənliyi ellipsin tənliyidir. Ona ellipsin *kanonik tənliyi* deyilir.

F_1 və F_2 fokusları üst-üstə düşdükdə, $c=0$ olur, buradan (4) bərabərliyinə əsasən $a=b$ şərti alınır və (3) tənliyi $x^2+y^2=a^2$ şəklini alır. Bu tənliklə a radiuslu, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan çevrə verilir. Bununla bir daha əmin oluruq ki, çevrə ellipsin xüsusi halıdır.

2. (3) kanonik tənliyindən γ ellipsinin həndəsi xassələrini öyrənmək üçün istifadə edək. Əgər $M(x,y)\in\gamma$ olarsa, onda x,y koordinatları (3) tənliyini ödəyirlər, ona görə də $x^2\le a^2, y^2\le b^2$. Buradan $-a\le x\le a, -b\le y\le b$ münasibətləri alınır, yəni ellipsin bütün nöqtələri şəkil 29-da təsvir olunan $M_1M_2M_3M_4$ düzbucaqlısına aid olurlar.



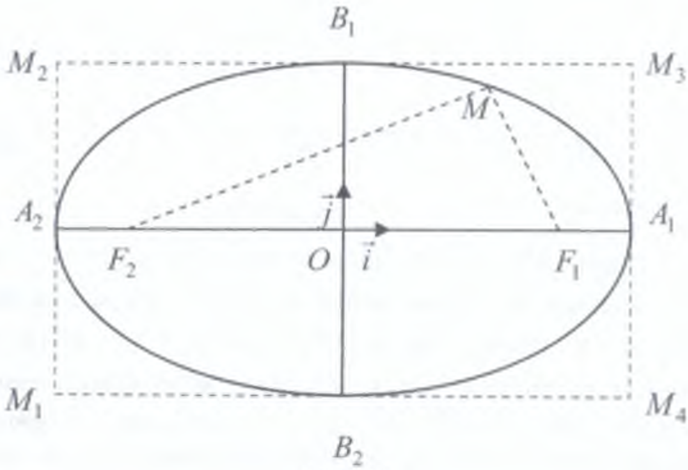
Şəkil 29

Əgər $M(x,y)\in\gamma$ olarsa, onda $M'(-x,-y)\in\gamma$, ona görə də O nöqtəsi ellipsin simmetriya mərkəzidir. Digər tərəfdən, əgər $M(x,y)\in\gamma$ olarsa, onda $M'(-x,y)\in\gamma$ və $M'(x,-y)\in\gamma$. Bura-dan görünür ki, Ox və Oy düz xətləri ellipsin simmetriya oxlarıdır. İsbat etmək olar ki, çevrədən fərqli ellipsin digər simmetriya oxları yoxdur. Bu halda fokuslardan keçən düz xəttə ellipsin *birinci*, və ya *fokal simmetriya oxu* deyilir. Birinci simmetriya oxuna perpendikulyar olan ox *ikinci simmetriya oxu* adlanır. Simmetriya oxlarından hər biri ellipslə iki nöqtədə kəsişir: $A_1(a,0), A_2(-a,0), B_1(b,0), B_2(-b,0)$. Bu nöqtələrə ellipsin *təpələri* deyilir (şək. 29). A_1A_2 və B_1B_2 parçaları ellipsin, uyğun olaraq, *böyük* və *kiçik* oxları adlanırlar. Ellipsin O mərkəzi bu parçaların ümumi orta nöqtəsidir. Aşkardır ki, $OA_1 = OA_2 = a$, $OB_1 = OB_2 = b$. Bu ədədlərə ellipsin uyğun olaraq, *böyük və kiçik yarımoxları* deyilir.

(3) tənliyi ilə verilmiş ellipsin forması haqqında təsəvvür yaratmaq üçün ellipsin müəyyən nöqtələrini qurmaq lazımdır. Ellips koordinat oxlarına nəzərən simmetrik olduğundan, birinci koordinat rübündə yerləşən nöqtələrə baxılması yetərlidir. Birinci rübün ($x \geq 0, y \geq 0$) $M(x, y)$ nöqtəsi üçün (3) tənliyindən alarıq:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Bu bərabərlikdən görünür ki, M nöqtəsinin x absisinin $0-$ dan $a-$ya qədər artması zamanı y ordinatı $b-$dən $0-$a qədər azalır. Bu mülahizələrə əsasən ellipsin qrafikini şəkil 30-dakı kimi qururuq:



Şəkil 30

3. $e=\dfrac{c}{a}$ ədədinə ellipsin *eksentrisiteti* deyilir. Tərifdən aydın olur ki, $0\le e<1$. Eksentrisitet yalnız və yalnız $c=0$ halında, yəni ellips çevrə olduqda sıfra bərabərdir.

Ellipsin formasının eksentrisitetdən necə asılı olduğunu aydınlaşdıraq. Bu məqsədlə $\dfrac{b}{a}$ nisbətini eksentrisitetlə ifadə edək:

$c=ea, b^2=a^2-c^2=a^2-e^2a^2=a^2(1-e^2)$

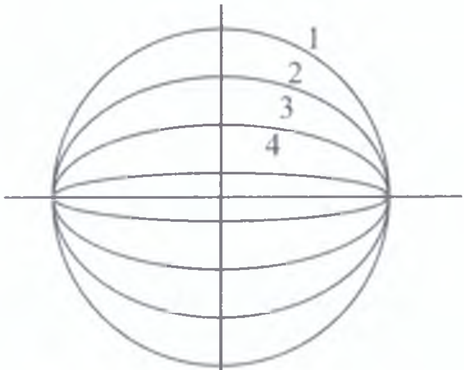
Buradan alırıq:

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}\,. \qquad (6)$$

Böyük yarımoxları eyni, lakin eksentrisitetləri müxtəlif olan ellipslər sisteminə baxaq. (6) münasibəti göstərir ki, e eksentrisiteti böyük olduqca, b yarımoxu daha kiçik olur və bundan başqa, vahidə yaxınlaşan e eksentirisiteti üçün b ədədi sıfra yaxınlaşır. Bu münasibət həm də onu göstərir ki, e eksentrisiteti kiçik olduqca, b yarımoxu daha böyük olur və sıfra bərabər olan e eksentirisiteti üçün $b=a$, yəni ellips çevrədir. Beləliklə, eksentrisitetin böyüməsi zamanı ellipsin «eni» kiçilir və o daha uzunsov şəkilli olur. Şəkil 31-də eksentrisitetləri

$$0=e_1<e_2<e_3<e_4$$

bərabərsizliklərini ödəyən ellipslər təsvir olunmuşdur:



Şəkil 31

Məsələ 1. Böyük və kiçik oxlarının cəmi 16 və fokusları arasındakı məsafə 8 olan ellipsin tənliyini yazın.

Həlli. Şərtə görə, $2a+2b=16, 2c=8$. Buradan

$$a+b=8, c=4$$

bərabəlikləri alınır. (4) düsturuna əsaən,

$$b^2=a^2-16,$$

və ya

$$(a-b)(a+b)=4 \Rightarrow a-b=2.$$

Beləliklə,

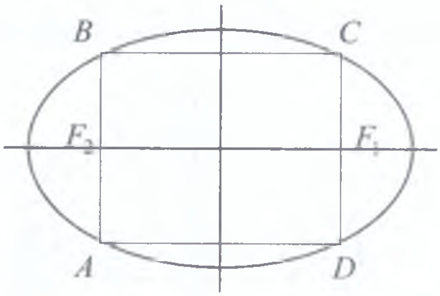
$$\begin{cases} a+b=8, \\ a-b=2 \end{cases}$$

xətti tənliklər sistemini alırıq. $a=5, b=3$ qiymətləri bu sistemin həllidir. Ona görə də ellipsin tənliyi bu şəkildədir:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Məsələ 2. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ ellipsinin daxilinə iki qarşı tərəfi fokuslardan keçən düzbugaqlı çəkilmişdir. Bu düzbucaqlının sahəsini tapın.

Həlli.



Şəkil 32

Aşkardır ki, ellipsin daxilinə çəkilən və fokuslardan keçən düzbucaqlının tərəfləri koordinat oxlarına paraleldir (Şək. 32). Kanonik tənliyə görə,

$$a^2=49, b^2=24 \Rightarrow a=7, b=2\sqrt{6}.$$

Buradan $c^2 = a^2 - b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$ bərabərliyi alınır. Şəkildən göründüyü kimi, düzbucaqlının AD tərəfi fokal məsafəyə bərabərdir: $AD = F_1F_2 = 2c = 10$. Bu düzbucaqlının C təpəsinin $C(5, y)$ koordinatları vardır. Bu nöqtə ellips üzərində yerləşdiyindən, koordinatları ellipsin tənliyini ödəyirlər:

$$\frac{25}{49} + \frac{y^2}{24} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{576}{49} \Rightarrow y = \frac{24}{7}.$$

D təpəsi C təpəsinə absis oxuna nəzərən simmetrik nöqtə olduğundan, $D\left(5, -\frac{24}{7}\right)$ koordinatlarına malikdir. Ona görə də düzbucaqlının CD tərəfi $CD = \frac{24}{7} - \left(-\frac{24}{7}\right) = \frac{48}{7}$ uzunluğuna malikdir. Beləliklə, düzbucaqlının sahəsi $S = AD \cdot CD =$ $= 10 \cdot \frac{48}{7} = 68\frac{4}{7}$ ifadəsinə malik olar.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. Ellipsin fokuslarından birinin böyük oxun uc nöqtələrinə qədər olan məsafələri uyğun olaraq, 7 və 1 ədədlərinə bərabərdir. Bu ellipsin tənliyini yazın.

Cavab: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1.$

2. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ ellipsi üzərində elə nöqtə tapın ki, bu nöqtə ellipsin sol fokusundan 5 vahid məsafədə yerləşsin.

Cavab: $(\pm 5, \pm 2)$.

3. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ ellipsi üzərində elə nöqtə tapın ki, onun sağ fokusdan məsafəsi sol fokusdan olan məsafəsindən 4 dəfə böyük olsun.

Cavab: $M_1\left(-\frac{15}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$ və $M_2\left(-\frac{15}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$.

4. Ellips $M\left(\sqrt{3}, -2\right)$ və $N\left(-2\sqrt{3}, 1\right)$ nöqtələrindən keçir. Simmetriya oxlarını koordinat oxları qəbul edərək, bu ellipsin tənliyini yazın.

Cavab: $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$.

§ 10. Hiperbola

1. Müstəvi üzərində verilmiş F_1 və F_2 nöqtələrindən məsafələri fərqinin mütləq qiyməti $PQ < F_1F_2$ şərtini ödəyən verilmiş PQ parçasının uzunluğuna bərabər olan bütün nöqtələr çoxluğuna *hiperbola* deyilir.

F_1 və F_2 nöqtələri *hiperbolanın fokusları*, onlar arasındakı məsafə isə *fokal məsafə* adlanır. $F_1F_2 > PQ > 0$ şərtinə əsasən, hiperbolanın fokusları müxtəlif nöqtələrdir.

Əgər M – verilmiş hiperbolanın nöqtəsidirsə, onda F_1M və F_2M parçalarına M nöqtəsinin *fokal radiusları* deyilir. Bu parçaların uzunluqları da M nöqtəsinin fokal radiusları adlanır.

Tutaq ki, $F_1F_2 = 2c, PQ = 2a$. $PQ < F_1F_2$ olduğundan, $a < c$.

Düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində γ hiperbolasının tənliyini yazaq, burada $O-$ F_1F_2 parçasının orta nöqtəsidir və $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OF_1}$. Bu koordinat sistemində F_1 və F_2 nöqtələrinin $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ koordinatları vardır. Ona görə də M nöqtəsinin F_1M və F_2M fokal radiusları

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \qquad (1)$$

düsturları ilə hesablanır.

Hiperbolanın tərifinə görə $|F_1M - F_2M| = 2a$ olduğundan, (1) şərtləri daxilində yaza bilərik:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Bu tənliyi

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \tag{2}$$

şəklində yazaq. (2) tənliyini kvadrata yüksəldib, oxşar hədləri islah etsək, alarıq:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Bu tənliyi bir daha kvadrata yüksəldib, zəruri çevirmələr aparsaq, onu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

şəklinə gətirmiş olarıq, burada

$$b^2 = c^2 - a^2. \tag{4}$$

Beləliklə, isbat etdik ki, γ hiperbolasının istənilən nöqtəsinin koordinatları (3) tənliyini ödəyirlər. Tərs hökmün doğruluğunu isbat edək: koordinatları (3) tənliyini ödəyən hər bir M nöqtəsi γ hiperbolasına aiddir, yəni $|F_1M - F_2M| = 2a$ bəra-bərliyini ödəyir. (1) düsturlarında y^2 – nın (3) tənliyindən olan qiymətini yerinə yazaq və (4) bərabərliyini nəzərə alaq:

$$F_1M = \left|\frac{c}{a}x - a\right|, \quad F_2M = \left|\frac{c}{a}x + a\right|.$$

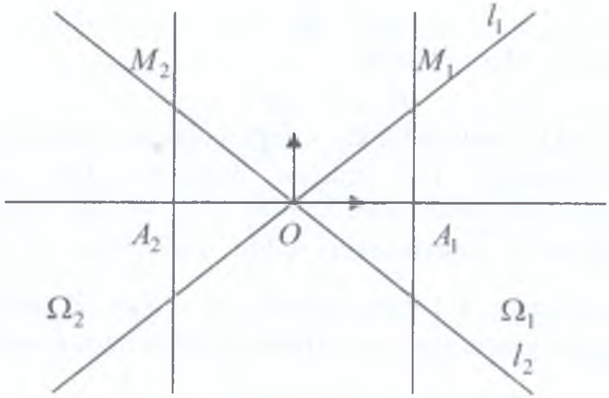
(3) tənliyindən alınır ki, $|x| \geq a$. Digər tərəfdən, $\frac{c}{a} > 1$ olduğuna görə aşağıdakılar doğrudur:

$$x > 0 \text{ olduqda, } F_1M = \frac{c}{a}x - a, \; F_2M = \frac{c}{a}x + a,$$

$$x < 0 \text{ olduqda, } F_1M = -\frac{c}{a}x + a, \; F_2M = -\frac{c}{a}x - a.$$

Buradan məlum olur ki, $|F_1M - F_2M| = 2a$, yəni $M \in \gamma$. Beləliklə, (3) tənliyi γ hiperbolasının tənliyidir. Bu tənlik hiperbolanın *kanonik tənliyi* adlanır.

2. (3) kanonik tənliyindən istifadə etməklə γ hiperbolasının həndəsi xassələrini öyrənək. Əgər $M(x,y) \in \gamma$ olarsa, onda (x,y) cütü (3) tənliyini ödəyər, buradan $x^2 \geq a^2$ münasibəti alınır. Beləliklə, ya $x \geq a$, ya da $x \leq -a$. Bu isə o deməkdir ki, şəkil 33-də təsvir olunan A_1M_1 və A_2M_2 düz xətlərinin əmələ gətirdikləri oblastın daxilində hiperbolanın nöqtələri yoxdur ($OA_1 = OA_2 = a$).



Şəkil 33

Ellips halına analoji qaydada isbat etmək olur ki, O nöqtəsi ellipsin simmetriya mərkəzidir, Ox və Oy düz xətləri isə onun simmetriya oxlarıdır. Simmetriya mərkəzinə hiperbolanın *mərkəzi* deyilir. Fokuslardan keçən simmetriya oxu-*birinci* və ya *fokal simmetriya oxu,* ona perpendikulyar olan və mərkəzdən keçən ox isə *ikinci,* və ya *xəyali simmetriya oxu* adlanır. Fokal simmetriya oxu hiperbolanı iki nöqtədə- $A_1(a,0), A(-a,0)$ nöqtələrində kəsir. İkinci simmetriya oxu hiperbolanı kəsmir. A_1

və A_2 nöqtələrinə hiperbolanın *təpələri*, A_1A_2 parçasına isə onun *həqiqi oxu* deyilir. a və b ədədləri hiperbolanın uyğun olaraq, *həqiqi və xəyali yarımoxları* adlanır.

3. (3) kanonik tənliyi ilə verilmiş γ hiperbolasının O mərkəzindən keçən l düz xətti ilə bu hiperbolanın qarşılıqlı vəziyyətini araşdıraq. l düz xəttinin $O\vec{i}\vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sistemində bucaq əmsallı $y = kx$ tənliyi ilə verildiyini qəbul edək. y dəyişəninin qiymətini (3) tənliyinidə yerinə yazıb, zəruri elementar çevirmələr aparsaq, alarıq:

$$x^2\left(b^2 - k^2a^2\right) = a^2b^2. \tag{5}$$

(5) tənliyinin kökləri l düz xətti ilə γ hiperbolasının kəsişmə nöqtələrinin absisləridir.

a) Əgər $b^2 - k^2a^2 > 0$ olarsa, onda l düz xəttinin γ hiperbolası ilə iki ortaq nöqtəsi vardır:

$$M_1\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}, \frac{kab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}\right), M_2\left(\frac{-ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}, \frac{-kab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}\right).$$

b) Əgər $b^2 - k^2a^2 < 0$ olarsa, onda (5) tənliyinin xəyali kökləri vardır, yəni l düz xətti γ hiperbolasını kəsmir.

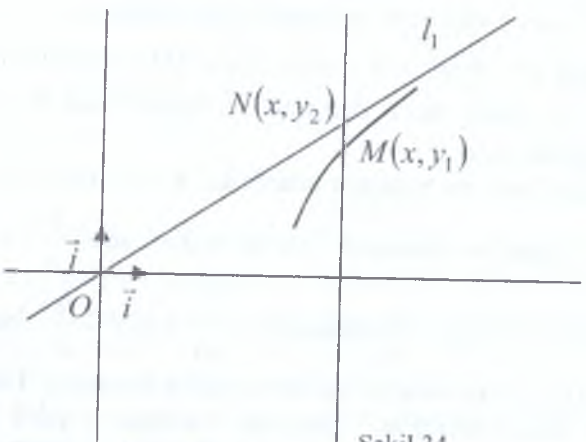
c) Əgər $b^2 - k^2a^2 = 0$ olarsa, onda (5) tənliyinin həlləri yoxdur, yəni bu halda da l düz xətti γ hiperbolası ilə ortaq nöqtələrə malik deyildir.

Beləliklə, belə bir nəticəyə gəlirik ki, $y = kx$ düz xətti (3) hiperbolasını yalnız və yalnız $b^2 - k^2a^2 > 0$, yəni $-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$ olduqda kəsir. $k = tg\alpha$ olduğundan, $-\frac{b}{a} < tg\alpha < \frac{b}{a}$, burada $\alpha - l$ düz xəttinin Ox oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır. Deməli, hiperbolanın bütün nöqtələri qarşılıqlı bucaqların şəkil 33-də ştrixlənən daxili oblastlarında yerləşirlər. Beləliklə, hiperbolanın iki qanadı vardır: onlardan biri Ω_1 oblastında yerləşir (sağ qanad), digəri isə Ω_2 oblastında yerləşir (sol qanad). Aydındır ki, bu qanadlar hiperbolanın simmetriya mərkəzinə və simmetriya oxlarına nəzərən simmetrikdirlər.

4. O mərkəzindən keçən l düz xətti ilə γ hiperbolasının qarşılıqlı vəziyyətinin $b^2 - k^2a^2 = 0$ bərabərliyi ilə müəyyən olunan halına bir daha nəzər yetirək. Qeyd etdiyimiz kimi, bu halda (5) tənliyinin həlləri yoxdur. Bu hala bucaq əmsalları $k_1 = \frac{b}{a}$ və $k_2 = -\frac{b}{a}$ olan l_1 və l_2 düz xətləri uyğundur. Bu düz xətlər *hiperbolanın asimptotları* adlanır (bax şək.33).

Hiperbolanın qanadlarının asimptotlara nəzərən hansı vəziyyətdə yerləşdiklərini aydınlaşdıraq. Tutaq ki, $M(x, y_1)$– hiperbolanın birinci rübdə $(x > 0, y \geq 0)$ yerləşən ixtiyari nöqtəsidir, $N(x, y_2)$ isə $y = \frac{b}{a}x$ tənliyi ilə verilən asimptotun nöqtəsidir (şək.34). MN parçasının uzunluğunu tapaq:

$$MN = |y_2 - y_1| = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right).$$

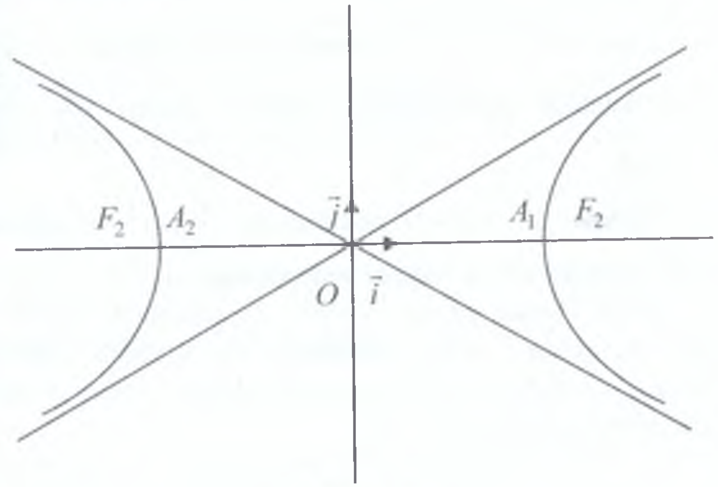


Şəkil 34

Buradan surət və məxrəci $x + \sqrt{x^2 - a^2}$ ifadəsinə vurmaqla alırıq:

$$MN = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Hiperbolanın M nöqtəsinin x absisinin qeyri-məhdud olaraq artması zamanı MN parçasının uzunluğu monoton azalaraq, sıfra yaxınlaşır, yəni M nöqtəsi qeyri-məhdud olaraq, asimptota yaxınlaşır. Bu xassə hiperbolanın asimptotlara nəzərən yerləşməsinə dair əyani təsəvvür yaradır. Şəkil 35-də hiperbola asimptotları ilə təsvir olunmuşdur.



Şəkil 35

5. $e = \frac{c}{a}$ ədədi hiperbolanın *eksentrisiteti* adlanır. $c > a$ olduğundan, hiperbolanın eksentrisiteti vahiddən kiçikdir. Hiperbolanın formasının eksentrisitetdən necə asılı olduğunu aydınlaşdıraq. (4) düsturundan alırıq: $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$, və ya $tg\alpha = \sqrt{e^2 - 1}$, burada α – absis oxu ilə asimptot arasında qalan bucaqdır. Beləliklə, eksentrisitet nə qədər böyükdürsə, α bucağı da bir o qədər böyükdür, yəni hiperbola özünün xəyali oxu boyunca bir o qədər «dartılmışdır».

Məsələ 1. Eksentrisiteti $e=1{,}25$ olan və fokusları $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ ellipsinin fokusları ilə eyni olan hiperbolanın tənliyini yazın.

Həlli. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ tənliyindən görünür ki, $c^2=a^2-b^2=$ $=49-24=25$, buradan $c=5$ olduğunu alırıq. Şərtə görə, $e=\frac{c}{a}=1{,}25$, və ya $\frac{5}{a}=\frac{5}{4}\Rightarrow a=4\Rightarrow a^2=16$. Hiperbolanm yarım oxları üçün $b^2=c^2-a^2$ bərabərliyi ödənildiyindən, $b^2=25-$ $-16=9$. Beləliklə hiperbolanın kanonik tənliyi $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ şəklindədir.

Məsələ 2. $A(3,-1)$ nöqtəsindən $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ hiperbolasının bu nöqtədə yarıya bölünən vətərini keçirin.

Həlli. Tutaq ki, $y+1=k(x-3)$ – axtarılan vətərin tənliyidir. Axtarılan vətərin hiperbola ilə kəsişmə nöqtələrini $M_1(x_1,y_1)$ və $M_2(x_2,y_2)$ ilə işarə edək. M_1M_2 vətəri A nöqtəsi ilə yarıya bölündüyündən,

$$\frac{x_1+x_2}{2}=3, \frac{y_1+y_2}{2}=-1,$$

və ya $x_1+x_2=6, y_1+y_2=-2$. $y+1=k(x-3)$ tənliyindən y – in $y=k(x-3)-1$ ifadəsim təyin edək və hiperbolanın kanonik tənliyində yerinə yazaq: $\frac{x^2}{4}-(k(x-3)-1)^2=1$,

və ya $$\left(\frac{1}{4}-k^2\right)x^2+2k(3k+1)x-9k^2-6k-2=0. \qquad (6)$$

(6) tənliyindən Viyet teoreminə görə alırıq:

$$x_1+x_2=\frac{-6k^2-2k}{\frac{1}{4}-k^2}=6,$$

buradan $k=-\frac{3}{4}$ olduğunu müəyyən edirik.

Beləliklə, axtarılan vətərin tənliyi

$$y+1=-\frac{3}{4}(x-3),$$

və ya

$$3x+4y-5=0$$

şəklindədir.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ ellipsinin fokuslarından keçən və fokusları bu ellipsin təpələrində yerləşən hiperbolanın tənliyini yazın.

Cavab: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1.$

2. Hiperbolanın asimptotlarının $y=\pm\frac{1}{2}x$ tənliklərini və bir $M(12,3\sqrt{3})$ nöqtəsini bilərək, onun tənliyini yazın.

Cavab: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1.$

3. Eksentrisiteti $e=2$ olan hiperbolanın asimptotları arasındakı bucağı tapın.

Cavab: 120^o.

4. $(2,-5)$ nöqtəsindən $x^2-4y^2=4$ hiperbolasının asimptotlarına paralel düz xətlər keçirin.

Cavab: $x-2y-12=0$ və $x+2y+8=0.$

5. Bərabərtərəfli $x^2-y^2=8$ hiperbolası verilmişdir. Fokusları verilmiş hiperbolanın fokusları ilə üst-üstə düşən və $M(-5,3)$ nöqtəsindən keçən hiperbolanm tənliyini yazın.

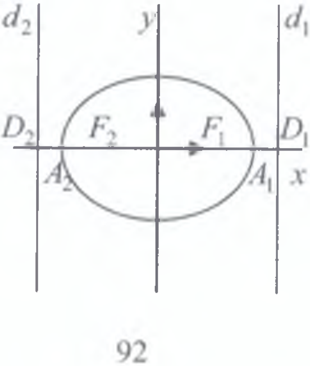
Cavab: $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1.$

$M\left(\frac{2p}{k^2},\frac{2p}{k}\right)$. Əgər $M(x,y)$ nöqtəsi parabola üzrə x absisinin qeyri – məhdud olaraq artması şərti daxilində yerini dəyişirsə, onda (2) tənliyindən göründüyü kimi, $|y|$ də qeyri-məhdud olaraq artır. Parabola şəkil 36-da təsvir olunmuşdur. Göstərmək olur ki, parabolanın fokal parametri böyük olduqca, parabola Oy oxu boyunca daha çox «dartılır».

3. Ellipsin (hiperbolanın) *direktrisləri* ikinci oxa paralel olan və ondan $\frac{a}{e}$ məsafəsində yerləşən iki düz xəttə deyilir, burada a – böyük (həqiqi) yarım oxdur, e – eksentrisitetdir. Çevrə üçün $e=0$ olduğundan, çevrənin direktrisləri yoxdur.

Ellipsin (hiperbolanın) direktrislərini d_1 və d_2 ilə işarə edirik, həm də indeksləri elə seçirik ki, birinci $F_1(c,0)$ fokusu və ona uyğun olan d_1 direktrisi ikinci koordinat oxundan bir tərəfdə, ikinci $F_2(-c,0)$ fokusu və ona uyğun olan d_2 direktrisi isə digər tərəfdə yerləşsin.

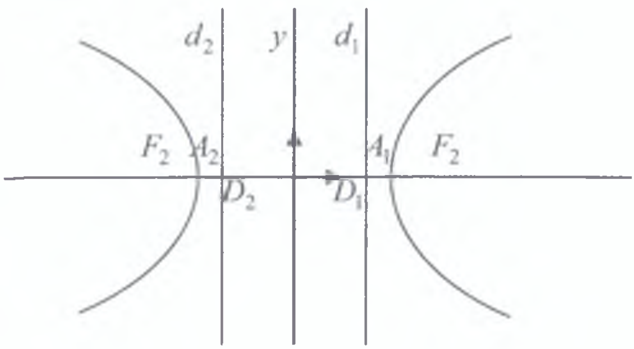
İsbat edək ki, ellipsin direktrislərinin onun A_1A_2 böyük oxu ilə ortaq nöqtələri yoxdur, ona görə direktrislər ellipsi kəsmirlər (şək. 37). Doğrudan da, tutaq ki, D_1 və D_2 - d_1 və d_2 direktrislərinin ellipsin fokal oxu ilə kəsişmə nöqtələridir. Onda $OA_1=OA_2=a, OD_1=OD_2=\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}$. $c<a$ olduğundan, $OA_1<OD_1$ və $OA_2<OD_2$. Buradan alınır ki, A_1 və A_2 nöqtələri



Şəkil 37

D_1D_2 parçasına daxildirlər və ona görə də d_1 və d_2 direktrislərinin A_1 A_2 parçası ilə ortaq nöqtələri yoxdur.

Analoji qayda ilə isbat etmək olur ki, hiperbolanın direktrisləri onun həqiqi oxunu kəsirlər, ona görə də hiperbolanın direktrisləri onun iki qanadınm arasında yerləşirlər və bu qanadları kəsmirlər (şək.38).



Şəkil 38

Teorem. *Ellips (hiperbola) müstəvinin elə γ' nöqtələri çoxluğudur ki, bu nöqtələrdən hər birinin fokusa qədər olan məsafəsinin həmin nöqtədən uyğun direktrisə qədər olan məsafəyə nisbəti eksentrisitetə bərabərdir.*

İsbatı. Qeyd edək ki, bu teoremdə faktiki olaraq iki hökm verilmişdir. Onlardan biri ellipsə, digəri isə hiperbolaya aiddir. Hiperbolaya aid olan hökmün doğruluğu ellipsdə olduğu kimi yoxlandığından, yalnız ellipsə aid olan hökmü isbat edək.

Tutaq ki, γ – verilmiş ellipsdir, F_1 sağ fokusdur, d_1 isə ona uyğun olan birinci direktrisdir. Kanonik koordinat sistemində F_1 nöqtəsinin $(c,0)$ koordinatları, d_1 düz xəttinin $x-\frac{a}{e}=0$ tənliyi vardır. Ona görə də əgər $M(x,y)$ – müstəvinin nöqtəsidirsə, onda

$$\rho(M,d_1)=\left|x-\frac{a}{e}\right|,\quad MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

(3) tənliyi γ xəttinin (yəni ellipsin, hiperbolanın bir qanadının və ya parabolanın) polyar koordinatlarla tənliyidir. Bu tənlik $e<1$ olduqda ellipsi, $e=1$ olduqda parabolanı, $e>1$ olduqda isə hiperbolanı təyin edir. p ədədi *fokal parametr* adlanır. Bu ternin parabolanın fokal parametri ilə tamamilə uzlaşır. Doğrudan da, əgər γ xətti paraboladırsa, onda $e=1$, ona görə də $p=DF$.

$DF-$fokusdan uyğun direktrisə qədər olan məsafə olduğundan, ellips və ya hiperbola halında yaza bilərik:

$$DF=\left|\frac{a}{e}-c\right|=\frac{|a-ec|}{e}. \tag{4}$$

p fokal parametrinin ifadəsində (4) bərabərliyini nəzərə alaq:

$$p=e\cdot DF=|a-ec|=\left|a-\frac{c^2}{a}\right|=\frac{\left|a^2-c^2\right|}{a}. \tag{5}$$

Əgər γ xətti ellipsdirsə, onda $\left|a^2-c^2\right|=a^2-c^2=b^2$. Digər tərəfdən, əgər γ xətti hiperbolanın bir qanadıdırsa, onda

$$\left|a^2-c^2\right|=c^2-a^2=b^2.$$

Beləliklə, (5) bərabərliyindən göründüyü kimi, hər iki halda

$$p=\frac{b^2}{a}. \tag{6}$$

Məsələ 1. Düzbucaqlı $O\bar{i}\bar{j}$ koordinat sistemində parabolanın fokusunun $F(4,2)$ koordinatları və direktrisinin $x+3y-6=0$ tənliyi verilmişdir. Bu parabolanın tənliyini yazın və fokal parametrini təyin edin.

Həlli. Parabolanın ixtiyari $M(x,y)$ nöqtəsi üçün

$$FM=\rho(M,d) \tag{7}$$

bərabərliyi doğrudur, burada $d-$parabolanın direktrisidir. Aşkardır ki,

$$FM=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2},\ \rho(M,d)=\frac{|x+3y-6|}{\sqrt{10}}. \tag{8}$$

(8) bərabərliklərini (7)-də nəzərə alaq:

$$(x-4)^2+(y-2)^2=\frac{(x+3y-6)^2}{10},$$

və ya

$$9x^2-6xy+y^2-68x-4y+164=0.$$

Parabolanın fokal parametri üçün $p=\rho(F,d)$ bərabərliyi doğrudur. Verilənlərə əsasən,

$$p=\rho(F,d)=\frac{|4+3\cdot 2-6|}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Məsələ 2. Polyar koordinatlarla tənliyi $r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$ şəklində olan ikitərtibli xəttin kanonik tənliyini yazın.

Həlli. Verilmiş tənliyi $r=\dfrac{\frac{9}{4}}{1-\frac{5}{4}\cos\varphi}$ şəklində yazaq.

Bu tənliklə (3) tənliyinin müqayisəsi göstərir ki, verilmiş xətt üçün $p=\dfrac{9}{4}$ və $e=\dfrac{5}{4}$. $e>1$ olduğuna görə verilmiş xətt hiperboladır.

Hiperbolanın eksentrisitetinin tərifinə görə və (6) düsturuna əsasən yaza bilərik:

$$\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4},\ \frac{c}{a}=\frac{5}{4}.$$

Buradan $\dfrac{c^2-a^2}{9}=\dfrac{c}{5}$, və ya $a^2=\dfrac{16}{25}c^2$ münasibətinə əsasən, $c=5$ bərabərliyi alınır. Beləliklə,

$$a^2=16, b^2=c^2-a^2=25-16=9.$$

və hiperbolanın kanonik tənliyi

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

şəklindədir.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. Fokusunun koordinatları $(5,0)$ olan və direktrisi ordinat oxu ilə üst-üstə düşən parabolanın tənliyini yazın.

Cavab: $y^2 = 10x - 25$.

2. $(2,1)$ nöqtəsindən parabolanın elə vətərini keçirin ki, bu nöqtədə yarıya bölünsün.

Cavab: $2x - y - 3 = 0$.

3. $y^2 = 64x$ parabolası ilə $4x + 3y + 46 = 0$ parabolası arasındakı məsafəni tapın.

Cavab: 2.

4. $r = \dfrac{3\sqrt{2}}{2 - \cos\varphi}$ ellipsinin yarım oxlarını və fokusları arasındakı məsafəni tapın.

Cavab: $a = 2\sqrt{3}, b = \sqrt{6}, 2c = 2\sqrt{2}$.

5. Polyar koordinatlarla tənliyi $r = \dfrac{4}{\sqrt{5} - \cos\varphi}$ şəklində olan ikitərtibli əyrinin kanonik tənliyini yazın.

Cavab: $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

§ 12. İkitərtibli xəttin ümumi tənliyi. İkitərtibli xəttin düz xətlə qarşılıqlı vəziyyəti. Asimptotik istiqamətlər

1. Əvvəlcə müstəvi üzərində nöqtə anlayışını genişləndirək, daha dəqiq desək, müstəvini xəyali nöqtələr adlandırılan nöqtələrlə tamamlayaq. Seçilmiş $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində nöqtə dedikdə müəyyən nizamla verilmiş (x,y) ədədlər cütünü başa düşəcəyik, burada $(x,y) \in C^2, C-$kompleks ədədlər çoxluğudur. x və y həqiqi ədədlər olduqda nöqtə *həqiqi* , onlardan heç olmazsa biri kompleks ədəd olduqda isə *xəyali nöqtə* adlandırılır. Məsələn, $A(3,-4)$ nöqtəsi həqiqi, $B(4i,-6)$ nöqtəsi isə xəyali nöqtədir. Bütün həqiqi və xəyali nöqtələrin çoxluğuna *kompleks müstəvi* deyilir. Verilmiş $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ nöqtələri bu nöqtələrin uyğun koordinatları kompleks-qoşma ədədlər olduqda *kompleks-qoşma nöqtələr* adlanırlar. Məsələn, $A(1-i,4+5i)$ və $B(1+i,4-5i)$ nöqtələri kompleks-qoşma nöqtələrdir.

2. Müstəvi üzərində hər hansı afin koordinat sistemində

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

tənliyi ilə verilə bilən xəttə *cəbri xətt* deyilir, burada $F(x,y)-$ x,y dəyişənlərindən asılı olan çoxhədlidir. $F(x,y)$ çoxhədlisinin dərəcəsi (1) tənliyi ilə təyin olunan xəttin *tərtibi* adlanır. Bir tərtibli xətlərə misal olaraq düz xətti göstərmək olar (bax, IV fəsil, § 7).

Cəbri xəttin tərifindən aydın olur ki, müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində ikitərtibli xəttin ümumi tənliyini

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \qquad (2)$$

şəklində yazmaq olar.

(2) tənliyinin əmsalları ixtiyari həqiqi ədədlərdir, belə ki, a_{11}, a_{12}, a_{22} əmsalları eyni vaxtda sıfra bərabər olmurlar.

a_{12}, a_{10}, a_{20} əmsallarını bəzi hallarda a_{21}, a_{01}, a_{02} kimi də işarə edəcəyik.

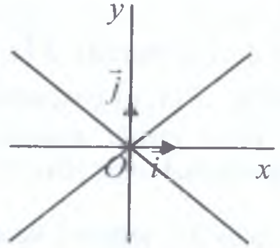
Aşağıdakı kimi qısaldılmış işarələmələr daxil edək:

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00},$$
$$F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{10},$$
$$F_2(x,y)=a_{21}x+a_{22}y+a_{20},$$
$$F_0(x,y)=a_{10}x+a_{20}y+a_{00}.$$

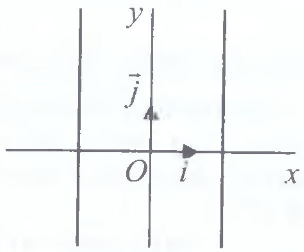
Bu işarələmələrdən istifadə edərək, (2) tənliyini qısaldılmış şəkildə belə yazmaq olar: $F(x,y)=0$, və ya

$$F_1(x,y)x+F_2(x,y)y+F_0(x,y)=0\,. \tag{3}$$

Xassələrini öyrəndiyimiz ellips, hiperbola və parabola iki tərtibli xətlərin ayrı-ayrı nümunələridir. İkitərtibli xətlərə dair digər nümunələrlə tanış olaq. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ tənliyi ilə verilən γ xətti ikitərtibli xətdir. Bu tənliyi $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0$ şəklində yazmaq olar. Bu halda deyirlər ki, γ xətti bir cüt kəsişən $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ və $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ düz xətlərinə parçalanır. (şək.40). Ana-



Şəkil 40



Şəkil 41

loji olaraq, $x^2-a^2=0$ tənliyi ilə verilən ikitərtibli xətt paralel $x-a=0$ və $x+a=0$ düz xətlər cütünə parçalanır, burada $a\neq 0$ (bax, şək. 41). Bu ikitərtibli xətlərin hər birinə daxil olan sonsuz sayda həqiqi və xəyali nöqtələr vardır. Lakin belə xassəyə malik olmayan ikitərtibli xətlər də vardır. Məsələn, $x^2+y^2=0$ tənliyi ilə təyin olunan ikitərtibli xəttin bir həqiqi $(0,0)$ nöqtəsi

və sonsuz sayda xəyali nöqtələri vardır, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ xəttinin isə həqiqi nöqtələri yoxdur, yəni onun bütün nöqtələri xəyali nöqtələrdir.

3. Tutaq ki, ikitərtibli γ xətti afin koordinat sistemində

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0 \tag{4}$$

ümumi tənliyi ilə, l düz xətti isə

$$x=x_0+p_1t,\quad y=y_0+p_2t \tag{5}$$

parametrik tənlikləri ilə verilmişdir.

l düz xətti ilə γ xəttinin kəsişmə nöqtələrini tapaq. x və y dəyişənlərinin (5) tənliklərindən olan qiymətlərini (4) tənliyində yerinə yazsaq, zəruri çevirmələrdən sonra alarıq:

$$Pt^2+2Qt+R=0, \tag{6}$$

burada

$$P=a_{11}p_1^2+2a_{12}p_1p_2+a_{22}p_2^2,$$
$$Q=F_1(x_0,y_0)p_1+F_2(x_0,y_0)p_2,$$
$$R=F(x_0,y_0).$$

(6) tənliyindən kəsişmə nöqtələrinin t_1,t_2 parametrlərini təyin edib, onları (5) tənliklərində yerinə yazmaqla kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını tapmış oluruq. Qeyd edək ki, (6) tənliyinin hər bir kökünə kəsişmə nöqtəsi uyğundur, belə ki, müxtəlif köklərə müxtəlif nöqtələr uyğundurlar: həqiqi köklərə-həqiqi nöqtələr və kompleks köklərə-xəyali nöqtələr.

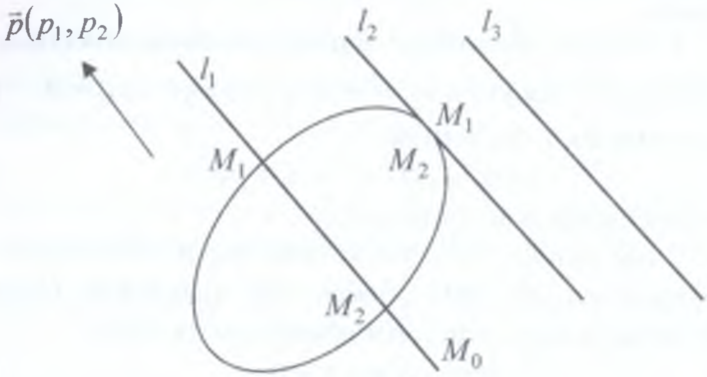
(6) tənliyini tədqiq edək. İki hal mümkündür:

1) $P\neq 0$. (6) tənliyinin iki kökü vardır:

$$t_1=\frac{-Q+\sqrt{\delta}}{P},\ t_2=\frac{-Q-\sqrt{\delta}}{P},$$

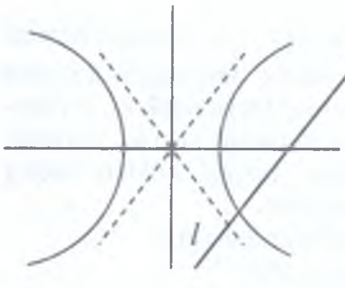
burada $\delta=Q^2-PR$ (6) tənliyinin diskriminantıdır. l düz xətti γ xəttini $\delta>0$ olduqda iki müxtəlif həqiqi, $\delta<0$ olduqda kompleks-qoşma, $\delta=0$ olduqda isə üst-üstə düşən həqiqi M_1 və

M_2 nöqtələrində kəsir. Şəkil 42-də l_1 düz xətti $\delta > 0$ halına, l_2 düz xətti $\delta = 0$ halına, l_3 düz xətti isə $\delta < 0$ halına uyğundur.

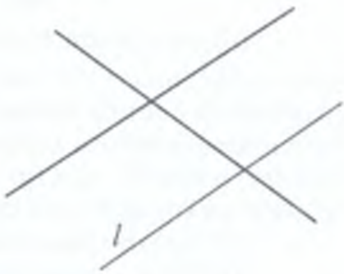


Şəkil 42

2) $P = 0$. (6) tənliyi belə bir şəklə gəlir: $2Qt + R = 0$. $Q \neq 0$ olduqda l düz xətti γ xəttini bir nöqtədə kəsir (şək. 43-də və ya şək. 44-də l düz xətti). $Q = 0, R \neq 0$ olduq-



Şəkil 43



Şəkil 44

da l düz xətti γ xətti ilə heç bir ortaq nöqtəyə (həqiqi və ya xəyali) malik olmur. $Q = 0, R = 0$ olduqda isə istənilən t (6) tənliyini ödədiyindən, $l \subset \gamma$ olur.

Beləliklə, *l düz xətti ilə γ ikitərtibli xəttinin qarşılıqlı vəziyyətinin altı halı* mümkündür:

$P \neq 0,$
- $\delta > 0$ – iki həqiqi kəsişmə nöqtələri vardır,
- $\delta < 0$ – xəyali kompleks-qoşma kəsişmə nöqtələri vardır,
- $\delta = 0$ – üst-üstə düşən kəsişmə nöqtələri vardır.

$P = 0,$
- $Q \neq 0$ – bir kəsişmə nöqtəsi vardır,
- $Q = 0, R \neq 0$ – kəsişmə nöqtələri yoxdur,
- $Q = 0, R \neq 0$ – düz xətt ikitərtibli xətt üzərində yerləşir.

4. (6) tənliyindəki P əmsalı yalnız l düz xəttinin $\bar{p}$ yönəldici vektorunun koordinatlarından asılıdır və M_0 nöqtəsinin (x_0, y_0) koordinatlarından asılı deyil. Buradan aydın olur ki, əgər $P \neq 0$ olarsa, onda $\bar{p}(p_1, p_2)$ vektoru istiqamətində yönələn bütün düz xətlər γ ikitərtibli xəttini iki nöqtədə (həqiqi müxtəlif, üst-üstə düşən və ya xəyali kompleks-qoşma) kəsirlər. Əgər $P = 0$ olarsa, onda ya $l \subset \gamma$, ya da l düz xətti γ ikitərtibli xəttini birdən çox olmayan nöqtədə kəsir.

Əgər sıfırdan fərqli $\bar{p}$ vektoruna paralel olan l düz xəttinin γ ikitərtibli xətti ilə birdən çox olmayan ortaq nöqtəsi vardırsa və ya l düz xətti γ xəttinin üzərində yerləşirsə, onda deyirlər ki, $\bar{p}$ vektorunun istiqaməti γ ikitərtibli xəttinə nəzərən *asimptotik* istiqamətdir. Bu tərifdən alınır: *sıfırdan fərqli $\bar{p}(p_1, p_2)$ vektorunun təyin etdiyi istiqamət yalnız və yalnız*

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0 \tag{7}$$

şərti ödənildikdə γ ikitərtibli xəttinə nəzərən asimptotik istiqamət olur.

(7) düsturundan istifadə etməklə ikitərtibli xəttə nəzərən asimptotik istiqamətləri tapmaq olur.

$a_{22} \neq 0$ olduqda (7) tənliyindən alınır ki, $p_1 \neq 0$ ($\bar{p}$ – sıfırdan fərqli vektor olduğu üçün), ona görə də (7) tənliyinin hər iki tərəfini p_1^2 – na bölüb, $k = \frac{p_2}{p_1}$ olduğunu nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0.$$

Bu kvadrat tənliyin həlləri

$$k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-\Delta}}{a_{22}}, \qquad (8)$$

şəklində tapılır, burada $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

$a_{22} = 0$ olduqda (7) tənliyi $a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 = 0$ şəklində yazılır. Bu tənliyi

$$\vec{e}_2(0,1) \text{ və } \vec{p}(-2a_{12}, a_{11}) \qquad (9)$$

vektorlarının koordinatları ödəyirlər.

İkitərtibli γ xəttinə nəzərən neçə asimptotik istiqamətin olduğunu aydınlaşdıraq. Üç halı nəzərdən keçirək.

1) $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Bu o deməkdir ki, $a_{22} \neq 0$. (8) düsturundan müəyyən edirik ki, γ xəttinə nəzərən asimptotik istiqamətlər yoxdur.

2) $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$. Bu halda γ xəttinə nəzərən iki asimptotik istiqamət vardır. Doğrudan da, $a_{22} \neq 0$ olduqda bu nəticə (8) düsturundan, $a_{22} = 0$ olduqda isə (9)-dan alınır. $a_{22} = 0$ halında $a_{12} \neq 0$ olur və ona görə də $\vec{e}_2(0,1)$ və $\vec{p}(-2a_{12}, a_{11})$ vektorları kollinear olmurlar.

3) $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. Bu halda γ xəttinə nəzərən yalnız bir asimptotik istiqamət vardır. Doğrudan da, $a_{22} \neq 0$ olduqda bu nəticə (8) düsturundan, $a_{22} = 0$ olduqda isə (9)-dan alınır. İkinci halda $a_{12} = 0$ olur və ona görə də $\vec{e}_2(0,1)$ və $\vec{p}(0, a_{11})$ vektorları kollinear olmaqla eyni bir asimptotik istiqaməti təyin edirlər.

Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem. *Tutaq ki, ikitərtibli xətt (4) tənliyi ilə verilmişdir və* $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. *Onda* $\Delta > 0$ *olduqda bu ikitərtibli xəttə nəzərən asimptotik istiqamətlər yoxdur,* $\Delta < 0$ *olduqda iki asimptotik istiqamət vardır,* $\Delta = 0$ *isə bir asimptotik istiqamət vardır.*

Qeyd. Asimptotik istiqamət anlayışı həndəsi anlayışdır (yəni həndəsi fiqurların qarşılıqlı vəziyyətinə görə təyin edilmişdir) və ona görə də koordinat sisteminin seçimindən asılı deyil. Buradan isbat etdiyimiz teoremə əsasən alınır ki, $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ *və ya* $\Delta = 0$ *şərtləri koordinat sisteminin seçimindən asılı deyil.*

Ellips, hiperbola və parabolaya nəzərən neçə asimptotik istiqamətin olduğunu aydınlaşdıraq. Tutaq ki, ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kanonik tənliyi ilə verilmişdir. Bu halda $\Delta = \frac{1}{a^2b^2} > 0$ olduğundan, *ellipsə nəzərən asimptotik istiqamətlər yoxdur.* Analogiyaya görə $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ kanonik tənliyi ilə verilmiş hiperbola üçün $\Delta = -\frac{1}{a^2b^2} < 0$ olduğundan, *hiperbolaya nəzərən iki asimptotik istiqamət vardır* (bu istiqamətlər hiperbolanın asimptotlarının istiqamətləri ilə üst-üstə düşürlər). Eyni qayda göstərmək olur ki, parabola halında $\Delta = 0$, ona görə də *parabolaya nəzərən yalnız bir asimptotik istiqamət vardır.* Bu nəticələrlə bağlı olaraq, ikitərtibili xətti $\Delta > 0$ olduqda *elliptik tip,* $\Delta < 0$ olduqda *hiperbolik tip,* $\Delta = 0$ olduqda isə *parabolik tip* xətt adlandırırlar.

Məsələ 1. $(0,0),(0,2),(-1,0),(-2,1)$ və $(-1,3)$ nöqtələrindən keçən ikitərtibli xəttin tənliyini yazın.

Həlli. İkitərtibli xəttin verilmiş nöqtələrdən keçməsi üçün, həmin nöqtələrin koordinatlarını növbə ilə ikitərtibli xəttin tənliyində yazdıqda, əmsallar arasında aşağıdakı münasibətlər ödənilməlidir:

$$a_{00}=0,\ 4a_{22}+4a_{20}+a_{00}=0,\ a_{11}-2a_{10}+a_{00}=0,$$
$$4a_{11}-4a_{12}+a_{22}-4a_{10}+2a_{20}+a_{00}=0,$$
$$a_{11}-6a_{12}+9a_{22}-2a_{10}+6a_{20}+a_{00}=0,$$
və ya
$$a_{00}=0,\ a_{22}+a_{20}=0,\ a_{11}-2a_{10}=0,$$
$$4a_{11}-4a_{12}+a_{22}-4a_{10}+2a_{20}=0,$$
$$a_{11}-6a_{12}+9a_{22}-2a_{10}+6a_{20}=0.$$
Buradan a_{11},a_{12},a_{22} və a_{10} əmsallarını $a_{20}\neq 0$ əmsalı ilə ifadə edək:
$$a_{11}=-\frac{3}{2}a_{20},\ a_{12}=-\frac{1}{2}a_{20},\ a_{22}=-a_{20},\ a_{10}=-\frac{3}{4}a_{20}.$$
Əmsalların tapılmış qiymətlərini ikitərtibli xəttin (4) ümumi tənliyində yerinə yazıb, a_{20} – a ixtisar etsək, axtarılan tənliyin
$$3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$$
şəklində olduğunu alarıq.

Məsələ 2. İkitərtibli xəttin $2x^2-4xy+y^2-x+1=0$ tənliyi verilmişdir. Koordinat sistemi paralel olaraq, $(1,0)$ nöqtəsinə köçürüldükdə ikitərtibli xəttin çevrilmiş tənliyini yazın.

Həlli. Koordinatların çevirmə düsturları
$$x=X+1,\qquad y=Y \tag{10}$$
şəklində olacaqdır. x və y dəyişənlərinin (10) düsturlarından olan ifadələrini ikitərtibli xəttin tənliyində nəzərə alaq:
$$2(X+1)^2-4(X+1)Y+Y^2-(X+1)+1=0,$$
və ya
$$2X^2-4XY+Y^2+3X-4Y+2=0. \tag{11}$$
(11) tənliyi verilmiş ikitərtibli xəttin çevrilmiş tənliyidir.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. $(0,0),(0,3),(6,0),(2,2)$ və $(-2,1)$ nöqtələrindən keçən ikitərtibli xəttin tənliyini yazın.

Cavab: $x^2+4xy+4y^2-6x-12y=0.$

2. İkitərtibli xəttin $xy-6x+2y+3=0$ tənliyi verilmişdir. Koordinat sistemi paralel olaraq, $(-2,6)$ nöqtəsinə köçürüldükdə ikitərtibli xəttin çevrilmiş tənliyini yazın.

Cavab: $xy+15=0.$

3. İkitərtibli xəttin $x^2+6x-8y+1=0$ tənliyi verilmişdir. Koordinat sistemi paralel olaraq, $(-3,-1)$ nöqtəsinə köçürüldükdə ikitərtibli xəttin çevrilmiş tənliyini yazın.

Cavab: $x^2-8y=0.$

4. $3x^2+7xy-6y^2-7x+34y-4=0$ xəttinin tipini müəyyən edin.

§ 13. İkitərtibli xəttin mərkəzi. İkitərtibli xəttə toxunan düz xətt

1. Əvvəlcə ikitərtibli xəttin vətərinin orta nöqtəsinə dair lemmanı isbat edək.

Lemma.

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0 \qquad (1)$$

tənliyi ilə verilmiş ikitərtibli xəttinə asimptotik istiqamətli olmayan $\vec{p}(p_1,p_2)$ *vektoru verilmişdir.*

$M(x_0,y_0)$ *nöqtəsinin* $\vec{p}$ *vektoruna paralel olan hər hansı vətərin orta nöqtəsi olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$F_1(x_0,y_0)p_1+F_2(x_0,y_0)p_2=0 \qquad (2)$$

bərabərliyinin ödənilməsidir.

İsbatı. $M(x_0,y_0)$ nöqtəsindən keçən və $\vec{p}$ vektoruna paralel olan l düz xəttinin parametrik tənliklərini yazaq: $x=p_1t+x_0$, $y=p_2t+y_0$. Tutaq ki, M_1 və M_2- l düz xəttinin verilmiş xətlə kəsişmə nöqtələridir, t_1 və t_2-bu nöqtələrin parametrləridir. Onda M_1 və M_2 nöqtələrinin

$$M_1(p_1t_1+x_0,p_2t_1+y_0),\ M_2(p_1t_2+x_0,p_2t_2+y_0)$$

koordinatları vardır. Aşkardır ki, $M(x_0,y_0)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $t_1+t_2=0$ şərti ödənildikdə M_1M_2 parçasının orta nöqtəsi olur. Digər tərəfdən, t_1 və t_2 § 12-də verilən

$$Pt^2+2Qt+R=0 \tag{3}$$

kvadrat tənliyinin həlləridir. Viyet teoreminə görə (3) tənliyinin köklərinin cəmi yalnız və yalnız $Q=0$ olduqda, yəni (2) şərti ödənildikdə sıfra bərabər olur. ■

2. İkitərtibli xəttin simmetriya mərkəzi olan C nöqtəsinə onun *mərkəzi* deyilir.

Teorem 1. *$C(x_0,y_0)$ nöqtəsinin (1) tənliyi ilə verilmiş ikitərtibli xəttin mərkəzi olması üçün zəruri və kafi şərt x_0,y_0 ədədlər cütünün*

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{12}=0, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{22}=0 \end{cases} \tag{4}$$

sisteminin həlli olmasıdır.

İsbatı. Tutaq ki, $C(x_0,y_0)-\gamma$ ikitərtibli xəttinin mərkəzidir. İsbat edək ki, x_0,y_0 ədədləri (4) sistemini ödəyirlər. C nöqtəsindən, uyğun olaraq, $\vec{p}(p_1,p_2)$ və $\vec{q}(q_1,q_2)$ vektorlarına paralel olan asimptotik olmayan istiqamətli iki vətər keçirək. $C-\gamma$ xəttinin mərkəzi olduğundan, bu nöqtə vətərlərdən hər birinin orta nöqtəsi olar. Vətərin orta nöqtəsinin koordinatlarına dair lemmaya görə

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0)p_1+F_2(x_0,y_0)p_2=0, \\ F_1(x_0,y_0)q_1+F_2(x_0,y_0)q_2=0. \end{cases} \tag{5}$$

$\vec{p}(p_1,p_2)$ və $\vec{q}(q_1,q_2)$ kollinear olmayan vektorlardır. Ona görə də $\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}\neq 0$. Buradan aydın olur ki, (5) bircins xətti tənliklər sisteminin yalnız sıfır həlli vardır: $F_1(x_0,y_0)=0$,

$F_2(x_0, y_0) = 0$, yəni C nöqtəsinin koordinatları (4) sistemini ödəyirlər.

Tərsinə, tutaq ki, $C(x_0, y_0)$ nöqtəsinin koordinatları (4) tənliklər sistemini ödəyirlər; isbat edək ki, $C - \gamma$ xəttinin mərkəzidir. Koordinat başlanğıcını $C(x_0, y_0)$ nöqtəsinə paralel köçürək və yeni koordinat sistemində γ ikitərtibli xəttinin tənliyini yazaq. Baxılan halda koordinatların çevirmə düsturları $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$ şəklindədir. γ xəttinin yeni koordinat sistemində tənliyini yazmaq üçün x və y dəyişənlərinin qiymətlərini (1) tənliyində yerinə yazaq:

$$a_{11}(X + x_0)^2 + 2a_{12}(X + x_0)(Y + y_0) + a_{22}(Y + y_0)^2 +$$
$$+ 2a_{10}(X + x_0) + 2a_{20}(Y + y_0) + a_{00},$$

və ya

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a'_{10}X + 2a'_{20}Y + a'_{00} = 0, \qquad (6)$$

burada

$$a'_{10} = F_1(x_0, y_0),\ a'_{20} = F_2(x_0, y_0),\ a'_{00} = F(x_0, y_0).$$

$C(x_0, y_0)$ nöqtəsinin koordinatları (4) sistemini ödədiklərindən, $a'_{10} = 0, a'_{20} = 0$, ona görə də (6) tənliyi

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + a'_{00} = 0$$

şəklində yazılır. Bu tənlikdən görünür ki, C nöqtəsi γ xəttinin simmetriya mərkəzidir. Doğrudan da, əgər $M(x, y) \in \gamma$ olarsa, onda $M'(-x, -y) \in \gamma$, burada $M' - M$ nöqtəsinə γ xəttinə nəzərən simmetrik olan nöqtədir. Beləliklə, $C - \gamma$ xəttinin mərkəzidir. ■

Nəticə. *Koordinat başlanğıcının (1) tənliyi ilə verilən xəttin mərkəzi olması üçün zəruri və kafi şərt* $a_{11} = a_{22} = 0$ *bərabərliklərinin ödənilməsidir.*

Doğrudan da, $(0,0)$ ədədləri yalnız və yalnız $a_{11} = a_{22} = 0$ olduqda (4) sistemini ödəyirlər. ■

3. Teorem 2 verilmiş ikitərtibli xəttin mərkəzlərinin varlığı ilə bağlı məsələni araşdırmağa imkan verir. Məsələ (4) tənliklər sisteminin tədqiqinə gətirilir.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix} \tag{7}$$

matrislərinə baxaq və bu matrislərin ranqlarını uyğun olaraq, r və R ilə işarə edək. Aşkardır ki, $r \le R$. Aşağıdakı hallar mümkündür:

1) $r = R = 2$. Bu halda (4) tənliklər sisteminin yeganə həlli vardır və ona görə də γ xətti bir və yalnız bir mərkəzə malikdir. Belə xassəyə malik olan ikitərtibli xətlərə *mərkəzi ikitərtibli xətlər* deyilir.

2) $r = R = 1$. Bu halda (4) sisteminin sonsuz sayda həlləri vardır: (4) sisteminin tənliklərindən biri digərinin nəticəsidir. İkitərtibli xətt mərkəzlər düz xəttinə malikdir. Bu düz xətt (4) sisteminin tənliklərindən biri ilə verilir.

3) $r = 1, R = 2$. (4) sistemi uyuşmayandır və bununla əlaqədar olaraq, ikitərtibli xəttin mərkəzi yoxdur.

Mərkəzləri olmayan və ya birdən çox mərkəzi olan ikitərtibli xətlərə *qeyri-mərkəzi xətlər* deyilir. Yuxarıdakı mühakimələrdən alınır ki, yalnız və yalnız $\Delta \neq 0$ olduqda ikitərtibli xətt mərkəzi xətdir. Beləliklə, *elliptik və hiperbolik tip xətlər mərkəzi xətlərdir, parabolik tip xətlər isə qeyri-mərkəzi xətlərdir.*

Ellips və hiperbola mərkəzi ikitərtibli xətlərdir ($\Delta \neq 0$ olduğuna görə), ona görə də bu xətlərin yeganə mərkəzi vardır. Ellips və hiperbolanın mərkəzi koordinat başlanğıcıdır. $y^2 = 2px$ kanonik tənliyi ilə verilmiş parabola üçün (7) matrisləri $r = 1, R = 2$ ranqlarına malik olduqlarına görə parabolanın mərkəzi yoxdur.

4. γ ikitərtibli xətti üzərində yerləşən M_0 nöqtəsi bu xəttin mərkəzi olarsa, onda deyirlər ki, M_0 *məxsusi* nöqtədir, əks halda M_0 nöqtəsinə *adi* nöqtə deyilir.

Əgər ikitərtibli xəttin adi M_0 nöqtəsindən keçən düz xətt ikitərtibli xətti üst-üstə düşən iki nöqtədə kəsirsə və ya onun üzərində yerləşirsə, onda deyirlər ki, düz xətt M_0 nöqtəsində ikitərtibli xəttə *toxunur*. Toxunan düz xəttə dair teoremi isbat edək.

Teorem 2. *İkitərtibli xəttin istənilən adi nöqtəsində bu xəttə bir və yalnız bir toxunan düz xətt vardır. Əgər ikitərtibli xətt (1) ümumi tənliyi ilə verilərsə, onda $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində toxunanın tənliyi*

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y +$$
$$+ (a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}) = 0 \qquad (7)$$

və ya

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_0(x_0, y_0) = 0$$

şəklində olar.

İsbatı. Tutaq ki, M_0 nöqtəsindən keçən l düz xətti $x = x_0 + p_1 t$, $y = y_0 + p_2 t$ parametrik tənlikləri ilə verilmişdir. l düz xəttinin verilmiş γ ikitərtibli xətti ilə kəsişmə nöqtələrinin parametrləri (3) tənliyindən təyin olunurlar. $M_0 \in \gamma$ olduğundan, bu nöqtənin koordinatları (1) ümumi tənliyini ödəyirlər, yəni $R = F(x_0, y_0) = 0$, ona görə də baxılan halda (3) tənliyi

$$Pt^2 + 2Qt = 0 \qquad (8)$$

şəklində yazılır.

İsbat edək ki, l düz xətti yalnız və yalnız $Q = 0$ olduqda γ ikitərtibli xəttinə toxunandır. Doğrudan da, əgər l-toxunan düz xətdirsə, onda ya (8) tənliyinin üst-üstə düşən iki kökü , ya da sonsuz sayda kökləri vardır. Hər iki halda $Q = 0$ şərti ödənilir. Tərsinə, əgər $Q = 0$ olarsa, onda (8) tənliyinin ya üst-üstə düşən iki kökü ($P \neq 0$ olduqda), ya da sonsuz sayda kökləri ($P = 0$ olduqda) vardır. $Q = 0$ bərabərliyinin açıq şəkildə yazılışı (3) şəklindədir. $M_0(x_0, y_0)$ adi nöqtə olduğundan, (3) bərabərliyindəki $F_1(x_0, y_0), F_2(x_0, y_0)$ əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Ona görə də (3) bərabərliyi yeganə $\vec{p}(p_1, p_2)$ istiqamətini təyin edir. Belə bir vektor olaraq,

$$\vec{t}\left(F_2(x_0, y_0), -F_1(x_0, y_0)\right)$$

vektorunu götürmək olar. M_0 nöqtəsindən $\vec{t}$ vektoru istiqamətində yönələn bir və yalnız bir düz xətt keçir, ona görə də M_0 nöqtəsində yeganə toxunan düz xətt vardır.

Toxunan düz xətt M_0 nöqtəsi və $\vec{t}$ yönəldici vektoru ilə təyin olunduğuna görə

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & F_2(x_0, y_0) \\ y - y_0 & -F_1(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

tənliyinə malikdir.

$M_0 \in \gamma$ olduğundan, § 12-dəki (3) düsturuna əsasən yaza bilərik:

$$F_1(x_0, y_0)x_0 + F_2(x_0, y_0)y_0 + F_0(x_0, y_0) = 0.$$

Buradan

$$F_0(x_0, y_0) = -\left(F_1(x_0, y_0)x_0 + F_2(x_0, y_0)y_0\right) \qquad (10)$$

şərti alınır. (10) şərti daxilində (9) tənliyi belə yazılar:

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_0(x_0, y_0) = 0.$$

Göründüyü kimi, bu tənlik (7) tənliyidir. ■

5. Ellips, hiperbola və parabolanın bütün nöqtələri adi nöqtələrdir, ona görə də bu xətlərin hər bir nöqtəsində bir və yalnız bir toxunan düz xətt vardır. Kanonik tənlikləri ilə verildiklərini nəzərə almaqla ellips, hiperbola və parabolanın toxunan düz xətlərinin tənliklərini yazaq.

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *ellipsinə* (x_0, y_0) *nöqtəsində toxunan düz xətt.* Bu halda $a_{11} = \dfrac{1}{a^2}, a_{22} = \dfrac{1}{b^2}, a_{00} = -1, a_{10} = a_{20} = a_{00} = 0$, ona görə də (7) tənliyi

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \qquad (11)$$

şəklində yazılır.

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *hiperbolasına* (x_0, y_0) *nöqtəsində toxunan düz xətt.* Analoji qayda ilə müəyyən edirik ki, hiperbolaya toxunan düz xətt

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1 \tag{12}$$

tənliyinə malikdir.

3) $y^2=2px$ *parabolasına* (x_0, y_0) *nöqtəsində toxunan düz xətt.* Bu halda $a_{22}=0, a_{10}=-p, a_{11}=a_{12}=a_{20}=a_{00}=0,$ ona görə də toxunanın tənliyi

$$yy_0=p(x+x_0) \tag{13}$$

şəklindədir.

Məsələ 1. a və b parametrlərinin hansı qiymətlərində $x^2+6xy+ay^2+3x+by-4=0$ ikitərtibli xətti parabolik tip xətdir?

Həlli. Verilmiş xətt üçün (7) matrislərini yazaq:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3 & \frac{3}{2}\\ 3 & a & \frac{b}{2}\end{pmatrix}.$$

Verilmiş ikitərtibli xəttin parabolik tipə aid olması üçün $r(A)=1$ və $R(B)=2$ olmalıdır. Bu o deməkdir ki,

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & a\end{vmatrix}=0,$$

və ya $a=9$ şərti ödənilməlidir. B matrisinin ranqının 2-yə bərabər olması üçün onun ikitərtibli minorlarından biri 0 – dan fərqli olmalıdır. Bu matrisin $\frac{b}{2}$ elementini özündə saxlayan $\begin{vmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ 3 & \frac{b}{2}\end{vmatrix}$ minorunun sıfırdan fərqli olduğunu tələb edək:

$$\frac{b}{2}-\frac{9}{2}\neq 0 \Rightarrow b\neq 9.$$

Beləliklə, verilmiş xətt $a=9$ və $b\neq 9$ olduqda parabolik tip ikitərtibli xətdir.

Məsələ 2. Koordinat başlanğıcından

$$3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$$

ikitərtibli xəttinə toxunan düz xətt keçirin.

Həlli. Toxunan düz xəttin (7) tənliyini yazaq:

$$\left(3x_0+\frac{7}{2}y_0+2\right)x+\left(\frac{7}{2}x_0+5y_0+\frac{5}{2}\right)y+\left(2x_0+\frac{5}{2}y_0+1\right)=0.$$

Toxunan düz xətt koordinat başlanğıcından keçdiyindən, bu tənlikdən alırıq: $2x_0+\frac{5}{2}y_0+1=0$, və ya

$$x_0=-\frac{1}{2}-\frac{5y_0}{4}. \tag{14}$$

Digər tərəfdən, (x_0, y_0) toxunma nöqtəsi ikitərtibli xətt üzərində yerləşdiyindən, koordinatları bu tənliyi ödəməlidirlər:

$$3x_0^2+7x_0y_0+5y_0^2+4x_0+5y_0+1=0.$$

(14) əvəzləməsini sonuncu bərabərlikdə nəzərə alaq:

$$15y_0^2+4y_0-4=0,$$

buradan $y_0=\frac{2}{5}$ və $y_0=-\frac{2}{3}$ qiymətləri alınır. Alınan qiymətlərə əsasən (14) bərabərliyindən yaza bilərik: $x_0=-1$ və $x_0=\frac{1}{3}$.

Beləliklə, toxunma nöqtələri $\left(-1,\frac{2}{5}\right)$ və $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ nöqtələridir.

Bu nöqtələrin koordinatlarını toxunan düz xəttin tənliyində nəzərə alsaq, müəyyən etmiş olarıq ki, axtarılan toxunanlar

$$2x+5y=0 \text{ və } 2x+y=0$$

düz xətləridir.

Məsələ 3. Hiperbola $(4,2)$ nöqtəsində $x-y-2=0$ düz xəttinə toxunur. Hiperbolanın tənliyini yazın.

Həlli. Göründüyü kimi, $x-y-2=0$ düz xəttinin bucaq əmsali 1 ədədinə bərabərdir. Hiperbolaya $(4,2)$ nöqtəsində toxunan düz xəttin tənliyi

$$\frac{4x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}=1 \text{ və ya } 4b^2x-2a^2y-a^2b^2=0$$

şəklindədir. Bu düz xəttin bucaq əmsalının 1 ədədinə bərabər olduğunu qəbul edək:

$$k=\frac{2b^2}{a^2}=1 \text{ və ya } a^2=2b^2.$$

Digər tərəfdən, $(4,2)$ nöqtəsi hiperbola üzərində yerləşdiyindən, koordinatları onun tənliyini ödəməlidirlər:

$$\frac{16}{2b^2}-\frac{4}{b^2}=1, \text{ və ya } b^2=4 \Rightarrow a^2=8.$$

Beləliklə, hiperbolanın tənliyi

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$$

şəklindədir.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. Verilmiş ikitərtibli xətlərin mərkəzlərini tapın:

$a)$ $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0.$

Cavab: $(7,5)$.

$b)$ $x^2-2xy+y^2-4x-6y+3=0.$

Cavab: mərkəz yoxdur.

$c)$ $x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0.$

Cavab: ikitərtibli xəttin mərkəzlər düz xətti vardır: $x+y+1=0.$

2. Koordinat başlanğıcı

$$2x^2-6xy+5y^2-2x+2y-10=0$$

ikitərtibli xəttinin mərkəzinə köçürüldükdə, bu xəttin tənliyi hansı şəkildə yazılar?

Cavab: $2x^2-6xy+5y^2-11=0$.

3. $(3,4)$ nöqtəsindən

$$2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$$

əyrisinə toxunan düz xətlər keçirin.

Cavab: $7x-2y-13=0, \quad x-3=0$.

4. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ ellipsinə elə toxunan düz xətlər çəkin ki, onlar $13x+12y-115=0$ düz xəttinə perpendikulyar olsunlar.

Cavab: $12x-13y\pm169=0$.

5. $y^2=12x$ parabolası verilmişdir. Bu parabolaya elə toxunan düz xətt keçirin ki, $4x-2y+9=0$ düz xətti ilə $\frac{\pi}{4}$ bucağını əmələ gətirsin.

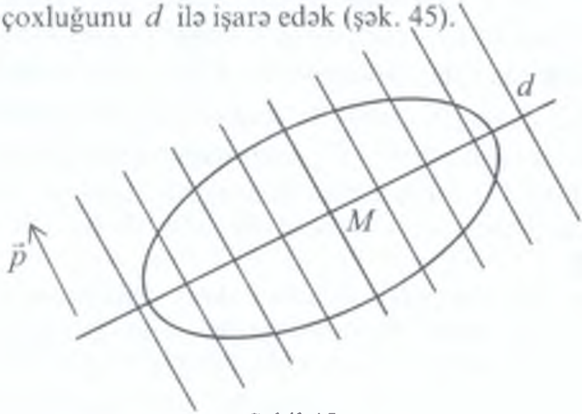
Cavab: $3x+y+1=0$.

§ 14. İkitərtibli xəttin diametrləri. Baş istiqamətlər və baş diametrlər

1. Tutaq ki, $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0 \quad (1)$$

tənliyi ilə γ ikitərtibli xətti verilmişdir. γ xəttinə nəzərən asimptotik istiqamətli olmayan hər hansı $\vec{p}(p_1,p_2)$ vektoruna baxaq. γ xəttimin $\vec{p}(p_1,p_2)$ istiqamətli vətərlərinin orta nöqtələri çoxluğunu d ilə işarə edək (şək. 45).



Şəkil 45

Vətərin orta nöqtəsinə dair lemmaya əsasən (bax, § 13, bənd 1) $M(x,y)$ nöqtəsi yalmz və yalnız

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{10})p_1+(a_{21}x+a_{22}y+a_{20})p_2=0 \quad (2)$$

şərti ödənldikdə d çoxluğuna daxil olur. (2) bərabərliyi d çoxluğunun tənliyidir. Bu tənliyi

$$(a_{11}p_1+a_{12}p_2)x+(a_{21}p_1+a_{22}p_2)y+a_{10}p_1+a_{20}p_2=0 \quad (3)$$

şəklində də yazmaq olar.

$\vec{p}$ vektoru asimptotik istiqamətli olmayan vektordur, ona görə də $(a_{11}p_1+a_{12}p_2)p_1+(a_{21}p_1+a_{22}p_2)p_2\neq 0$ (bax § 13, (7) düsturu). Buradan müəyyən edirik ki, (3) tənliyində x və y məchullarının əmsalları eyni vaxtda sıfra bərabər ola bilməz. Bu isə o deməkdir ki, d düz xətdir. Beləliklə, aşağıdakı teorem isbat olundu.

Teorem 1. *(1) ikitərtibli xəttinin asimptotik istiqamətli olmayan $\vec{p}(p_1, p_2)$ vektoruna paralel olan bütün vətərlərinnin orta nöqtələri çoxluğu (3) tənliyi ilə verilən düz xətdir.*

d düz xətti, istiqamətləri $\vec{p}$ vektoru ilə təyin olunan vətərlərə qoşma olan *diametr* adlanır. Həmçinin deyirlər ki, diametr $\vec{p}$ vektoruna qoşmadır.

2. İkitərtibli xətlərin diametrlərinin bəzi xassələrini qeyd edək.

1^0. *Əgər ikitərtibli xəttin mərkəzləri vardırsa, onda mərkəzlərdən hər biri xəttin istənilən diametrinə daxildir.*

Doğrudan da, fərz edək ki, $C(x_0, y_0)$ – ikitərtibli xəttin mərkəzidir, d isə (2) tənliyi ilə verilən ixtiyari diametrdir. § 13-dəki teorem 1-ə görə C nöqtəsinin koordinatları həmin paraqrafdakı (4) bərabərliklərini ödəyirlər. Onda C nöqtəsinin koordinatları həm də (2) tənliyini ödəyirlər. Bu isə o deməkdir ki, $C \in d$. ■

Bu xassədən maraqlı nəticə alınır: birdən çox mərkəzləri olan ikitərtibli xəttin bir və yalnız bir diametri vardır. Ümumi halda ikitərtibli xəttin sonsuz sayda diametrləri ola bilər.

2^0. *Əgər mərkəzi ikitərtibli xətt verilmişdirsə, onda mərkəzdən keçən asimptotik istiqamətli olmayan istənilən düz xətt bu xəttin diametridir.*

Doğrudan da, əgər (1) tənliyi ilə verilən ikitərtibli xəttin yeganə mərkəzi vardırsa, onda

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0$$

düz xətləri bu xəttin mərkəzində kəsişirlər. Lakin xəttin mərkəzindən keçən istənilən d düz xəttinin tənliyini

$$p_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + p_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0$$

şəklində yazmaq olar, burada p_1 və p_2 ədədlərindən heç olmasa biri sıfra bərabər deyil. Bu tənliklə (2) tənliyinin müqayisəsi göstərir ki, əgər $\vec{p}(p_1, p_2)$ vektoru asimptotik istiqamətli deyilsə, onda d düz xətti $\vec{p}$ istiqamətli vətərlərə

qoşma olan diametrdir. Lakin d düz xəttinin asimptotik istiqamətli olmamasından ona qoşma olan $\vec{p}$ vektorunun da asimptotik istiqamətli olmaması alınır. Beləliklə, d düz xətti diametrdir. ■

3^0. *Qeyri-mərkəzi ikitərtibli xəttin istənilən diametri asimptotik istiqamətə malikdir.*

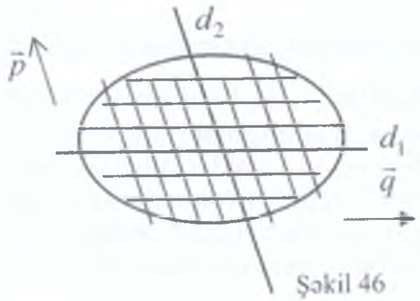
Doğrudan da, fərz edək ki, d qeyri-mərkəzi ikitərtibli xəttin istənilən diametridir, (3) isə bu diametrin tənliyidir. Onda $\vec{q}(-a_{21}p_1 - a_{22}p_2, a_{11}p_1 + a_{12}p_2)$ vektoru d düz xəttinin yönəldici vektorudur. Asanlıqla yoxlamaq olur ki, $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 0$ şərti daxilində (bu münasibət ikitərtibli xəttin qeyri-mərkəzi olmasını təyin edir)

$$a_{11}(-a_{21}p_1 - a_{22}p_2)^2 + 2a_{12}(-a_{21}p_1 - a_{22}p_2)(a_{11}p_1 + a_{12}p_2) +$$
$$+ a_{22}(a_{11}p_1 + a_{12}p_2)^2 = 0$$

bərabərliyi ödənilir. Bu isə $\vec{q}$ vektorunun asimptotik istiqamətli olduğunu göstərir. ■

Teorem 2. *Əgər mərkəzi ikitərtibli xəttin d_1 diametri d_2 diametrinə paralel olan vətərlərin orta nöqtələri çoxluğudursa, onda d_2 diametri də d_1 diametrinə paralel olan vətərlərin orta nöqtələri çoxluğudur.*

İsbatı. Tutaq ki, d_1 diametri $\vec{p}$ vektoruna, d_2 diametri isə $\vec{q}$ vektoruna qoşmadır (şək. 46). Teoremin şərtinə görə $\vec{p} \| d_2$.



Şəkil 46

İsbat edək ki, $\bar{q}\|d_1$. d_2 diametrinin tənliyi

$$q_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + q_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0$$

şəklindədir. $\bar{p}$ vektoru bu düz xəttin yönəldici vektoru olduğundan,

$$p_1(a_{11}q_1 + a_{12}q_2) + p_2(a_{21}q_1 + a_{22}q_2) = 0,$$

və ya

$$q_1(a_{11}p_1 + a_{12}p_2) + q_2(a_{21}p_1 + a_{22}p_2) = 0 \qquad (4)$$

bərabərliyi doğrudur. Digər tərəfdən, d_1 diametri (2) tənliyinə malik olduğuna görə (4) bərabərliyi göstərir ki, $\bar{q}\|d_1$. ■

Əgər ikitərtibli xəttin iki diametrindən hər biri digərinə paralel olan vətərləri yarıya bölürsə, onda deyirlər ki, bu diametrlər *qoşmadırlar*. Məsələn, şəkil 46-da ellipsin qoşma d_1 və d_2 diametrləri təsvir olunmuşdur.

3. Tutaq ki, sıfırdan fərqli $\bar{p}(p_1, p_2)$ və $\bar{q}(q_1, q_2)$ vektorları verilmişdir.

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0 \qquad (5)$$

şərti ödənildikdə, deyirlər ki, $\bar{p}$ vektorunun istiqaməti (1) tənliyi ilə verilən ikitərtibli xəttə nəzərən $\bar{q}$ vektorunun istiqaməti ilə *qoşmadır*.

$\dfrac{p_2}{p_1} = k_1, \dfrac{q_2}{q_1} = k_2$ işarə etsək, (5) qoşmalıq şərtinin

$$a_{22}k_1k_2 + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{11} = 0$$

ifadəsini alarıq.

$a_{ij} = a_{ji}$ olduğundan, istiqamətlərin qoşmalığı qarşılıqlıdır. Ona görə də deyirlər ki, $\bar{p}$ və $\bar{q}$ vektorlarının istiqamətləri (1) ikitərtibli xəttinə nəzərən qoşmadırlar.

(5) bərabərliyinin § 12-dəki (7) bərabərliyi ilə müqayisəsi göstərir ki, asimptotik istiqamət özünə qoşma olan istiqamətdir. Digər tərəfdən, (4) bərabərliyindən aydın olur ki, ikitərtibli xəttin qoşma diametrləri qoşma istiqamətlərə malikdirlər.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, *ikitərtibli xəttə nəzərən qoşmalıq anlayışı həndəsi məna daşıyır və ona görə də koordinat sisteminin seçimindən asılı deyil.*

4. Özünə perpendikulyar istiqamətə qoşma olan istiqamət verilmiş ikitərtibli xəttə nəzərən *baş istiqamət* adlanır. Qoşmalıq anlayışının qarşılıqlı olmasından alınır ki, əgər verilmiş istiqamət baş istiqamətdirsə, onda ona perpendikulyar olan istiqamət də baş istiqamətdir.

Tutaq ki, düzbucaqlı $O\bar{i}\bar{j}$ koordinat sistemində (1) ümumi tənliyi ilə ikitərtibli xətt verilmişdir. Tərifə görə sıfırdan fərqli $\bar{p}(p_1, p_2)$ vektoru yalnız və yalnız $\bar{p}(p_1, p_2)$ və $\bar{q}(-p_2, p_1)$ vektorları qoşma istiqamətlərə malik olduqda verilmiş ikitərtibli xəttə nəzərən baş istiqamətli vektordur. Bu vektorların koordinatlarını (5) qoşmalıq şərtində yerinə yazmaqla alarıq:

$$(a_{22} - a_{11})p_1p_2 + a_{12}(p_1^2 - p_2^2) = 0. \qquad (6)$$

(6) düsturu ikitərtibli xəttə nəzərən baş istiqamətləri tapmağa, həmçinin bu və ya digər ikitərtibli xəttə nəzərən neçə baş istiqamətin olduğunu aydınlaşdırmağa imkan verir. Aşağıdakı hallara baxaq.

1) $a_{12} \neq 0$. Bu halda $p_1 \neq 0$ olar ($\bar{p} \neq \bar{0}$ şərtinə əsasən).

Əgər $k = \dfrac{p_2}{p_1}$ qəbul etsək, onda (6) tənliyi belə yazılar:

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0. \qquad (7)$$

Bu kvadrat tənliyin iki müxtəlif həqiqi kökü vardır:

$$k_{1,2} = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}.$$

Aşkardır ki, bu köklər $k_1k_2 = \dfrac{-a_{12}}{a_{12}} = -1$ şərtini ödəyirlər.

Buradan aydın olur ki, verilmiş ikitərtibli xəttə nəzərən iki və yalnız iki baş istiqamət vardır.

2) $a_{12}=0, a_{22}-a_{11}\neq 0$. (6) tənliyi $(a_{22}-a_{11})p_1p_2=0$ və ya $p_1p_2=0$ şəklində yazılır. Aşkardır ki, sonuncu bərabərliyi yalnız və yalnız koordinat oxlarının istiqamətləri ödəyirlər. Beləliklə, bu halda koordinat oxlarının istiqamətləri verilmiş ikitərtibli xəttə nəzərən baş istiqamətlər olur.

3) $a_{12}=0, a_{22}-a_{11}=0$. Aşkardır ki, istənilən $\vec{p}(p_1,p_2)$ vektorunun koordinatları (6) tənliyimi ödəyərlər. Ona görə də istənilən istiqamət ikitərtibli xəttə nəzərən baş istiqamət olar. Bu halda ikitərtibli xətt həqiqi, xəyali və ya sıfır radiuslu çevrədir.

Beləliklə, aşağıdakı teorem isbat olundu.

Teorem 3. *Çevrədən fərqli istənilən ikitərtibli xəttə nəzərən iki və yalnız iki baş istiqamət vardır. Müstəvinin ixtiyari istiqaməti çevrəyə nəzərən baş istiqamətdir.*

5. Qoşma vətərlərə perpendikulyar olan diametrə ikitərtibli xəttin *baş diametri* deyilir. Tərifdən aydın olur ki, baş diametr ikitərtibli xəttin simmetriya oxudur.

Tutaq ki, d – baş diametrdir, $\vec{p}(p_1,p_2)$ isə qoşma vətərlərə paralel olan vektordur. $\vec{p}$ vektorunun istiqaməti d diametrinin istiqaməti ilə qoşmadır, ona görə də $\vec{p}$ baş istiqamətli vektordur, bu isə o deməkdir ki, d diametri də baş istiqamətə malikdir. Tərsinə, əgər $\vec{p}$ baş istiqamətli vektor olub, asimptotik istiqamətə malik deyildirsə, onda $\vec{p}$ vektoruna qoşma olan diametr ona perpendikulyar olduğundan baş diametrdir. Beləliklə, baş diametrlərin tapılmasından ötrü ikitərtibli xəttə nəzərən elə baş istiqamətləri tapmaq lazımdır ki, onlar asimptotik istiqamətli olmasınlar.Belə istiqamətlərə qoşma olan diametrlər ikitərtibli xəttə nəzərən baş diametrlərdir.

Teorem 4. *Çevrədən fərqli istənilən mərkəzi ikitərtibli xəttin iki və yalnız iki baş diametri vardır; çevrənin istənilən diametri onun baş diametrdir. Qeyri-mərkəzi ikitərtibli xəttin yalnız bir baş diametri vardır.*

İsbatı. a) Tutaq ki, γ – çevrədən fərqli mərkəzi ikitərtibli xətdir. Teorem 3-ə görə γ xəttinin iki və yalnız iki baş istiqaməti vardır. Baş istiqamətlər bir-biri ilə qoşma olduqlarından, bu istiqamətlər asimptotik olmayan istiqamətlərdir (asimptotik istiqamət özü ilə qoşma olan istiqamətdir). Ona görə də bu istiqamətlər üzrə yönələn vətərlərlə qoşma olan diametrlər baş diametrlərdir.

b) Çevrə elliptik tip ikitərtibli xətt olduğundan, asimptotik istiqamətləri yoxdur. Digər tərəfdən, teorem 2-yə görə, istənilən istiqamət çevrəyə nəzərən baş istiqamətdir. Ona görə də çevrənin istənilən diametri onun baş diametridir.

c) Tutaq ki, γ – qeyri-mərkəzi ikitərtibli xətdir, $\vec{p}$ bu xəttə nəzərən asimptotik istiqamətli vektordur, $\vec{q}$ isə $\vec{p}$ – yə perpendikulyar olan sıfırdan fərqli vektordur. İki istiqamətin (5) qoşmalıq şərtini (4) şəklində də yazmaq olar. § 12-də verilən teoremə görə qeyri-mərkəzi γ ikitərtibli xəttinə nəzərən asimptotik istiqamətli vektor $a_{22} \neq 0$ olduqda $\vec{p}(a_{22}, -a_{12})$ vektoru, $a_{22} = 0$ olduqda isə $\vec{p}(0,1)$ vektorudur. Hər iki halda

$$a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = 0, \quad a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = 0 \tag{8}$$

bərabərlikləri ödənilir. (8) bərabərliklərindən və (4) qoşmalıq şərtindən görünür ki, istənilən istiqamət, o cümlədən $\vec{q}$ vektorunun istiqaməti $\vec{p}$ vektorunun istiqaməti ilə qoşmadır. Ona görə də $\vec{p}$ və $\vec{q}$ vektorlarından hər birinin istiqaməti baş istiqamətdir. Teorem 3-ə görə γ xəttinin bunlardan fərqli baş istiqamətləri yoxdur. $\vec{q}$ vektoruna qoşma olan diametr γ xəttinin yeganə baş diametridir. ■

Məsələ 1. $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ xəttinin elə iki qoşma diametrini tapın ki, onlardan biri koordinat başlanğıcından keçsin.

Həlli. Verilmiş xəttin ixtiyari diametrinin (2) tənliyini yazaq:

$$(x - y - 2)p_1 + (-x + 2y - 3)p_2 = 0. \tag{9}$$

$k = \dfrac{p_2}{p_1}$ qəbul etsək, (8) tənliyini

$$(x - y - 2) + (-x + 2y - 3)k = 0 \tag{10}$$

şəklində yaza bilərik, burada k – qoşma diametrin bucaq əmsalıdır. Koordinat başlanğıcından keçən diametr halında (10) tənliyindən $x = y = 0$ şərtləri daxilində $-2-3k=0$ və ya $k=-\frac{2}{3}$ alınır. Bucaq əmsalının bu qiymətini (10) tənliyində yerinə yazıb, sadələşdirsək, $5x-7y=0$ tənliyini alarıq. Bu tənlik verilmiş xəttin koordinat başlanğıcından keçən diametrinin tənliyidir. Bu diametrin bucaq əmsalı $k'=\frac{5}{7}$ ədədinə bərabərdir. Ona görə də $5x-7y=0$ tənliyi ilə verilən diametrə qoşma olan diametrin tənliyi

$$(x-y-2)+(-x+2y-3)\frac{5}{7}=0$$

şəklindədir. Bu tənliyin sol tərəfini sadələşdirməklə qoşma diametrin $2x+3y-29=0$ tənliyini alarıq.

Məsələ 2. $2x^2+4xy+5y^2-8x+6=0$ xəttinin $2x-y+5=0$ düz xəttinə paralel olan diametrinin tənliyini yazın.

Həlli. Verilmiş xəttin ixtiyari diametrinin tənliyi

$$(2x+2y-4)+(2x+5y)k=0 \qquad (11)$$

şəklindədir. $2x-y+5=0$ düz xətti $k=2$ bucaq əmsalına malikdir. Ona görə də axtarılan diametrə qoşma olan diametrin tənliyi $(2x+2y-4)+(2x+5y)2=0$ şəklində olacaqdır. Bu tənliyi çevirmələrin köməyi ilə $3x+6y-2=0$ şəklinə gətiririk. Bu diametrin bucaq əmsalını hesablayaq: $k'=-\frac{1}{2}$. Bucaq əmsalının bu qiymətini (11) tənliyində yerinə yazsaq, axtarılan diametrin

$$(2x+2y-4)+(2x+5y)\left(-\frac{1}{2}\right)=0,$$

və ya $2x-y-8=0$ tənliyini alarıq.

Məsələ 3. $3x^2+2xy+3y^2+6x-2y-5=0$ xəttinin baş diametrlərini tapın.

Həlli. $\Delta = a_{11}a_{22}-a_{12}^2 = 3\cdot 3-1 = 8 \neq 0$ olduğundan, verilmiş xətt mərkəzi ikitərtibli xətdir, ona görə də teorem 4-ə əsasən iki baş diametri vardır. Baş diametrlərin bucaq əmsallarını (7) kvadrat tənliyindən tapırıq:

$$k^2+(3-3)k-1=0,\ \text{və ya}\ k^2=1 \Rightarrow k=1, k'=-1.$$

Verilmiş xəttin istənilən diametrinin tənliyini yazaq:

$$(3x+y+3)+(x+3y-1)k=0. \qquad (12)$$

(12) tənliyində $k=1$ qiymətini yerinə yazsaq, baş diametrlərdən birinin $2x+2y+1=0$ tənliyini və $k'=-1$ qiymətini yerinə yazsaq, digər baş diametrin $x-y+2=0$ tənliyini alarıq.

Məsələ 4. $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0$ tənliyi ilə verilmiş ikitərtibli xəttin baş diametrlərini tapın.

Həlli. $\Delta = a_{11}a_{22}-a_{12}^2 = 9\cdot 16-12^2 = 144-144 = 0$ oldu-ğundan, verilmiş xətt qeyri-mərkəzi ikitərtibli xətdir. $a_{22}=9\neq 0$ olduğundan, verilmiş ikitərtibli xəttə nəzərən bir $k=\frac{-a_{12}}{a_{22}}=\frac{-3}{4}$ asimptotik istiqaməti vardır. $k=-\frac{3}{4}$ istiqaməti verilmiş xəttin baş istiqamətlərindən biridir. Digər baş istiqamət asimptotik istiqamətli olmayıb, $k\cdot k'=-1$ şərtini ödəyir. Ona görə də $k'=\frac{4}{3}$. Verilmiş ikitərtibli xəttin istənilən diametrinin tənliyi

$$(9x+12y-20)+(12x+16y+15)k=0$$

şəklindədir. Bu tənlikdə k – nın yerinə $k'=\frac{4}{3}$ yazsaq, verilmiş ikitərtibli xəttin baş diametrinin $3x+4y=0$ tənliyini alarıq.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. $(1,-2)$ nöqtəsindən

$$3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$$

xəttinin diametri keçirilmişdir. Bu diametrin və onunla qoşma olan diametrin tənliklərini yazın.

Cavab: $x+2y+3=0$ və $7x-5y+2=0$.

2. $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$ ikitərtibli xətti və onun $x+2y-2=0$ diametri verilmişdir. Bu diametrlə qoşma olan diametrin tənliyini yazın.

Cavab: $x+1=0$.

3. $6x^2-xy-2y^2+4y=0$ ikitərtibli xəttinin absis oxu ilə $\alpha=45^0$ bucağını əmələ gətirən diametrini tapın.

Cavab: $49x-49y+44=0$.

4. $5x^2-3xy+y^2-3x+2y-5=0$ ikitərtibli xətti verilmişdir. Bu xəttin $x-2y-1=0$ düz xəttindən kəsdiyi vətərin orta nöqtəsindən keçən diametrini tapın.

Cavab: $17x-4y-4=0$.

5. Verilmiş ikitərtibli xətlərin baş diametrlərini tapın:

$a)$ $5x^2+24xy-2y^2+4x-1=0$;

Cavab: $28x+21y+4=0$ və $33x-44y-6=0$.

$b)$ $x^2-3xy+y^2+1=0$.

Cavab: $x+y=0$ və $x-y=0$.

6. $x^2-2xy+y^2+x-2y+3=0$ parabolasının simmetriya oxunu tapın.

Cavab: $4x-4y+3=0$.

§ 15. İkitərtibli xətlərin təsnifatı. İkitərtibli xəttin tənliyinin kanonik şəklə gətirilməsi və onun nöqtələrinin qurulması

1. Tutaq ki, düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0 \qquad (1)$$

tənliyi ilə ikitərtibli γ xətti verilmişdir.

Koordinat sistemini O nöqtəsi ətrafında elə döndərək ki, yeni $O\vec{i}'\vec{j}'$ koordinat sisteminin $\vec{j}'$ koordinat vektorunun istiqaməti γ xəttinə nəzərən baş istiqamət olsun, lakin asimptotik istiqamət olmasın. Onda $\vec{i}'$ vektoru da baş istiqamətə malik olacaqdır. γ xəttinin yeni koordinat sistemində tənliyini yazaq:

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_{10}x'+2a'_{20}y'+a_{00}=0.$$

$\vec{j}'(0,1)$ vektoru baş istiqamətə malik olduğundan, onun koordinatları § 14-dəki (6) bərabərliyini ödəyirlər, ona görə də $a'_{12}=0$. Digər tərəfdən, $\vec{j}'$ vektorunun istiqaməti asimptotik istiqamət olmadığından,

$$a'_{11}\cdot 0+2a'_{12}\cdot 0+a'_{22}\cdot 1\neq 0 \Rightarrow a'_{22}\neq 0.$$

Beləliklə, (2) tənliyi bu şəkildə yazılar:

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+2a'_{10}x'+2a'_{20}y'+a_{00}=0. \qquad (2)$$

Bu tənliyin daha sadə şəklə gətirilməsi koordinat başlanğıcının yeni O' nöqtəsinə köçürülməsi yolu ilə həyata keçirilir. γ xəttinin mərkəzlərinin olub-olmaması baxımından müxtəlif halları nəzərdən keçirək.

2. *Mərkəzi ikitərtibli xətlərin təsnifatı.* Koordinat başlanğıcını γ xəttinin O' mərkəzinə köçürək. § 13-dəki teorem 1-dən alınan nəticəyə görə, $a'_{10}=0, a'_{20}=0$, ona görə də yeni koordinat sistemində γ xəttinin tənliyi belə yazılar:

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{00}=0, \qquad (3)$$

burada $a'_{11}a'_{22}\neq 0.$

İki hal mümkündür.

1) $a'_{00} \neq 0$. (3) tənliyini belə yaza bilərik:

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1, \tag{4}$$

burada $A=-\frac{a'_{00}}{a'_{11}}, B=-\frac{a'_{00}}{a'_{22}}$. Ümumiliyi pozmadan fərz edirik ki, $A \geq B$.

a) Əgər $A>0, B>0$ olarsa, onda (4) xətti yarımoxları $\sqrt{A}$ və $\sqrt{B}$ olan ellipsdir.

b) Əgər $A>0, B<0$ olarsa, onda (4) xətti yarımoxları $\sqrt{A}$ və $\sqrt{-B}$ olan hiperboladır.

c) Əgər $A<0, B<0$ olarsa, onda $A=-a^2, B=-b^2$ qəbul etməklə (4) tənliyini

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

şəklində yaza bilərik, burada $a>0, b>0$. İkitərtibli xəttin həqiqi nöqtələri yoxdur və ona *xəyali ellips* deyilir.

2) $a'_{00}=0$. (3) tənliyini belə yazırıq: $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=0$, burada $A>0$.

a) Əgər $B<0$ olarsa, onda $A=a^2, B=-b^2$ işarə etməklə $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, və ya $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$ tənliyini alarıq. İkitərtibli xətt

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \text{ və } \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

kəsişən düz xətlər cütünə parçalanır.

b) Əgər $B>0$ olarsa, onda analoji qayda ilə $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ tənliyini alarıq. İkitərtibli xətt bir həqiqi nöqtəni-koordinat başlanğıcını özündə saxlayır. Bu halda deyirlər ki, ikitərtibli xətt $\frac{x}{a}+i\frac{y}{b}=0$ və $\frac{x}{a}-i\frac{y}{b}=0$ *kəsişən xəyali düz xətlər cütünə parçalanır.*

3. *Mərkəzləri olan qeyri-mərkəzi ikitərtibli xətlərin təsnifatı.* Koordinat başlanğıcını γ ikitərtibli xəttinin mərkəzlərindən biri olan O' nöqtəsinə köçürək. Bu halda $\vec{i}'$ koordinat vektoru asimptotik istiqamətə malik olur. Ona görə də $a'_{11}=0$ olur və (3) tənliyi belə yazılır:

$$y^2+C=0, \text{ burada } C=\frac{a'_{00}}{a'_{22}}. \tag{5}$$

a) Əgər $C<0$ olarsa, onda $C=-a^2$ qəbul etməklə (5) tənliyini $y^2-a^2=0$, və ya $(y-a)(y+a)=0$ şəklində yazarıq. İkitərtibli xətt *paralel* $y-a=0$ *və* $y+a=0$ *düz xətlər cütünə parçalanır.*

b) Əgər $C>0$ olarsa, onda analoji qayda ilə $y^2+a^2=0$, və ya $(y-ia)(y+ia)=0$ tənliyini alarıq.İkitərtibli xətt həqiqi nöqtələrə malik olmur. Bu halda deyirlər ki, *ikitərtibli xətt paralel xəyali* $y-ia=0$ *və* $y+ia=0$ *düz xətlər cütünə parçalanır.*

c) *Əgər* $C=0$ olarsa, onda (5) tənliyi $y^2=0$, və ya $y\cdot y=0$ şəklində yazılar. Bu halda deyirlər ki, ikitərtibli xətt *üst-üstə düşən* $y=0$ *və* $y=0$ *düz xətlər cütünə parçalanır.*

4. *Mərkəzləri olmayan ikitərtibli xətlərin təsnifatı.* Bu halda § 14-dəki teorem 4-ə görə ikitərtibli γ xəttinin bir baş diametri vardır . Koordinat başlanğıcını γ xəttinin baş diametri üzərindəki müəyyən O' nöqtəsinə köçürək. Beləliklə, γ xəttinin baş diametri $O'\vec{i}'$ oxu ilə üst-üstə düşür və ona görə də $\vec{j}'$ vektoruna paralel olan vətərləri yarıya bölür. Tutaq ki, γ xəttinin $O'\vec{i}'\vec{j}'$ koordinat sistemindəki tənliyi (2) şəklindədir.

Onda $\vec{i'}$ vektorunun istiqaməti baş istiqamət olduğuna görə $a'_{11}=0$. $\vec{j}'(0,1)$ istiqamətinə qoşma olan baş diametrin tənliyi

$$a'_{12}x'+a'_{22}y'+a'_{20}=0$$

şəklində yazılır (bax, § 14, (2) tənliyi). Qeyd etdiyimiz kimi, absis oxu γ xəttinin baş diametridir və $y'=0$ tənliyinə malikdir. Buradan $a'_{12}=0$ şərti daxilində $a'_{22}\neq 0, a'_{20}=0$ münasibətləri alınır. Beləliklə, γ xəttinin $O'\vec{i'}\vec{j'}$ koordinat sistemindəki tənliyi

$$a'_{22}y'^2+2a'_{10}x'+a'_{00}=0 \qquad (6)$$

şəklindədir. O' nöqtəsi γ xəttinin mərkəzi olmadığından, $a'_{10}\neq 0$. (6) tənliyindən görünür ki, absis oxu γ xəttini $\left(-\dfrac{a'_{00}}{a'_{10}},0\right)$ nöqtəsində kəsir. Əgər koordinat başlanğıcını bu nöqtəyə köçürsək, onda γ xəttinin tənliyini $a'_{22}y^2+2a'_{10}x=0$ və ya $y^2=2px$ şəklinə gətirmiş olarıq, burada $p=-\dfrac{a'_{10}}{a'_{22}}$. Bu tənlik parabolanın kanonik tənliyidir.

Yuxarıdakılardan aydın olur ki, ikitərtibli xətlərin doqquz növü vardır:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (ellips);

2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (hiperbola);

3) $y^2=2px$ (parabola);

4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ (xəyali ellips);

5) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ (kəsişən həqiqi düz xətlər cütü);

6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ (kəsişən xəyali düz xətlər cütü);

7) $y^2-a^2=0$ (paralel həqiqi düz xətlər cütü);

8) $y^2+a^2=0$ (paralel xəyali düz xətlər cütü);

9) $y^2=0$ (üst-üstə düşən düz xətlər cütü).

5. İkitərtibli xətt tənliyinin kanonik şəklə gətirilməsinə, yəni sadələşdirilməsinə dair nümunələrə baxaq. Tutaq ki, γ ikitərtibli xətti $O\vec{i}\vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sisteminə nəzərən (1) tənliyi ilə verilmişdir. Nəzərdə tuturuq ki, $a_{12}\neq 0$. γ xəttinin baş istiqamətlərini tapaq və onları yeni koordinat oxlarının istiqamətləri qəbul edək. Baş istiqamətin vahid $\vec{p}(\cos\alpha,\sin\alpha)$ vektorunun koordinatları (burada $\alpha=\widehat{\vec{i},\vec{p}}$) § 14-dəki (6) tənliyini ödəyirlər. Bu tənliyi belə yaza bilərik:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha & a_{21}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}=0.$$

Baş istiqamətli hər bir $\vec{p}$ vektoru üçün elə λ ədədi vardır ki,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha=\lambda\cos\alpha,\\ a_{21}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha=\lambda\cos\alpha \end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha=0,\\ a_{21}\cos\alpha+(a_{22}-\lambda)\sin\alpha=0 \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Bu sistem yalmz və yalnız

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)=0 \tag{8}$$

bərabərliyi ödənildikdə uyuşan olur. (8) tənliyinə γ ikitərtibli xəttinin *xarakteristik tənliyi* deyilir. Bu tənliyin kökləri

$$\lambda=\frac{(a_{11}+a_{22})\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{2}$$

düsturu ilə tapılır. $(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2 \geq 0$ olduğundan, (8) xarakteristik tənliyinin λ_1 və λ_2 kökləri həqiqi ədədlərdir. Bundan başqa, γ çevrə olmadıqda (yəni $(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2 \neq 0$ şərti ödənildikdə) $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Müəyyənlik üçün fərz edək ki, $\lambda_2 \neq 0$. Bu köklərdən hər birini (7) tənliyində yerinə yazmaqla, baş istiqamət vektorunun koordinatlarını təyin etməyə imkan verən münasibəti alarıq. Beləliklə, xarakteristik tənliyin hər bir kökünə baş istiqamət uyğundur.

Tutaq ki, $\vec{i}'(\cos\alpha, \sin\alpha)-\lambda_1$ kökünə uyğun olan baş istiqamətin vahid vektorudur. (7) bərabərliyindən alırıq:

$$(a_{11}-\lambda_1)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0,$$

buradan $tg\alpha = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$.

$\sin\alpha$ və $\cos\alpha$ -nı təyin edək:

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1=tg^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1=tg^2\alpha}}. \tag{9}$$

Koordinatların çevirmə düsturlarını yazaq (bax, § 6, 11 düsturları):

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \tag{10}$$

x və y dəyişənlərinin (10) qiymətlərini (1) tənliyində yerinə yazsaq, γ xəttinin $O\vec{i}'\vec{j}'$ koordinat sistemindəki tənliyini alarıq:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0, \tag{11}$$

burada

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\ a'_{22} &= a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \\ a'_{10} &= a_{10}\cos\alpha + a_{20}\sin\alpha, \\ a'_{20} &= -a_{10}\sin\alpha + a_{20}\cos\alpha, \\ a'_{00} &= a_{00}. \end{aligned} \tag{12}$$

Birinci düsturdan (7) bərabərliklərinə əsasən alarıq:

$$a'_{11}=(a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha)\cos\alpha+(a_{21}\cos\alpha+$$
$$+a_{22}\sin\alpha)\sin\alpha=\lambda_1\cos^2\alpha+\lambda_1\sin^2\alpha=\lambda_1.$$

(12) düsturlarından yaza bilərik:

$$a'_{11}+a'_{22}=a_{11}+a_{22},\ \text{və ya}\ \lambda_1+a'_{22}=a_{11}+a_{22}.$$

Lakin Viyet teoreminə görə $a_{11}+a_{22}=\lambda_1+\lambda_2$, buradan $a'_{22}=\lambda_2$. Beləliklə, γ xəttinin (11) tənliyi bu şəklə gətirildi:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2a'_{10}x'+2a'_{20}y'+a_{00}=0. \qquad (13)$$

a'_{10} və a'_{20} əmsallarını (12) düsturlarından tapırıq.

Koordinat başlanğıcını müəyyən O' nöqtəsinə köçürməklə (13) tənliyindən γ xəttinin kanonik tənliyini alırıq. Əgər γ xətti parabola deyilsə, onda O' – xəttin mərkəzidir, (və ya mərkəz-lərindən biridir); γ xətti parabola olduqda isə O' nöqtəsi onun təpəsidir.

6. Beləliklə, ikitərtibli γ xəttinin (1) tənliyini kanonik şəklə gətirmək və bu xəttin nöqtələrini qurmaq üçün aşağıdakıları yerinə yetirmək lazımdır:

1) (8) xarakteristik tənliyinin köklərini tapmaq.

2) (9) düsturlarına görə $\vec{i}'(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\vec{j}(-\sin\alpha,\cos\alpha)$ vektorlarının koordinatlarını tapmaq.

3) (12) düsturlarına əsasən a'_{10} və a'_{20} əmsallarını hesablamaq və γ xəttinin (13) tənliyini yazmaq.

4) Koordinat başlanğıcının paralel köçürülməsi yolu ilə γ xəttinin kanonik tənliyini almaq.

5) O' nöqtəsinin və $\vec{i}',\vec{j}'$ vektorlarının koordinatlarına görə $O'\vec{i}'\vec{j}'$ koordinat sistemini, sonra isə yeni $O'\vec{i}'\vec{j}'$ koordinat sistemində kanonik tənliyinə görə ikitərtibli xəttin nöqtələrini qurmaq.

Göstərilən sxem üzrə ikitərtibli xəttin nöqtələrinin qurulmasına dair bir nümunəyə baxaq.

Məsələ 1. $5x^2+5y^2+8xy-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-8=0$

ümumi tənliyi ilə verilmiş ikitərtibli xətti düzbucaqlı koordinat sistemində qurun.

Həlli. 1) Verilmiş ikitərtibli xətt üçün (8) xarakteristik tənliyini yazaq və onun köklərini tapaq:

$$\lambda^2-10\lambda+9=0, \lambda_1=1, \lambda_2=9.$$

2) (9) düsturlarına görə $\vec{i}'(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\vec{j}'(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ vektorlarının koordinatlarını tapırıq:

$$tg\alpha=-1, \quad \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha=45^0,$$

$$\vec{i}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \vec{j}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

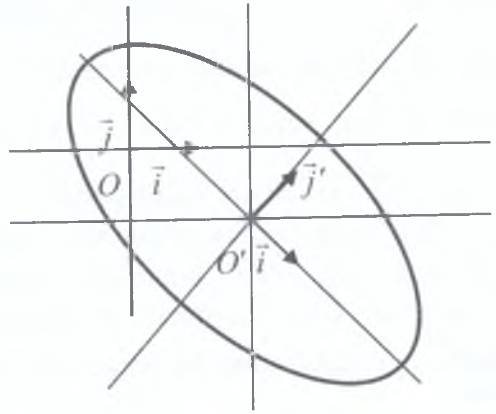
3) (12) düsturlarına əsasən a'_{10}, a'_{20} əmsallarını hesablayırıq; $a'_{10}=-1, a'_{20}=0$. Verilmiş ikitərtibli xətt üçün (13) tənliyi bu şəkildə yazılır: $x'^2+9y'^2-2x'-8=0$.

4) $\Delta'=1\cdot 9=9\neq 0$ olduğundan, verilmiş ikitərtibli xətt mərkəzi ikitərtibli xətdir. § 13-dəki (4) düsturlarına görə O' mərkəzinin koordinatlarını tapırıq: $O'(1,0)$. Koordinat sisteminin O' nöqtəsinə paralel köçürülməsi düsturları $x'=X+1, y'=Y$ şəklində yazılır. Ona görə də ikitərtibli xətt $O'\vec{i}'\vec{j}'$ koordinat sistemində

$$X^2+9Y^2-9=0, \text{ və ya } \frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{1}=1 \qquad (14)$$

tənliyinə malik olur. Bu, yarımoxları $a=3, b=1$ olan ellipsin tənliyidir.

5) Şəkil 47-də ellipsinin qurulması göstərilmişdir. Əvvəlcə $O\vec{i}\vec{j}'$ koordinat sistemini və bu sistemdə $O'(1,0)$ nöqtəsini qururuq. Sonra isə O' nöqtəsindən $O'\vec{i}'\vec{j}'$ koordinat sisteminin koordinat oxlarını keçirib, bu oxlar üzərində yarımoxlara görə ellipsin təpələrini qeyd edirik. Nəhayət, ellipsin qrafikini təsvir edirik.



Şəkil 47

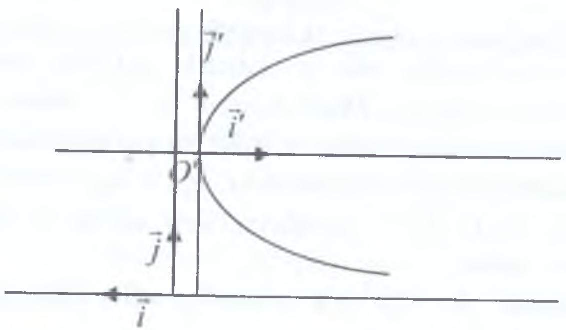
7. Bir sıra hallarda ikitərtibli xəttin (1) tənliyində bəzi əmsallar sıfra bərabər olur və nəticədə yuxarıda göstərdiyimiz sxem nisbətən sadələşir. Məsələn, əgər $a_{12}=0$ olarsa, onda baş istiqamətləri tapmağa ehtiyac yoxdur və göstərdiyimiz sxemin 4 və 5 bəndlərini icra etmək kifayətdir. $a_{10}=a_{20}=0$ olduğu halda isə yalnız 1,2,3, və 5 bəndlərini icra etmək lazımdır. Bəzi nümunələrə baxaq.

Məsələ 2. $2y^2+4x-8y+9y=0$ ikitərtibli xəttini düzbucaqlı koordinat sistemində qurun.

Həlli. $a_{12}=0$ olduğundan, $\vec{i}$ və $\vec{j}$ koordinat vektorlarının istiqamətləri baş istiqamətlərdir. § 13-dəki (4) sistemi uyuşmayandır:

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y+2=0, \\ 0\cdot x+2y-4=0. \end{cases}$$

Bu isə o deməkdir ki, verilmiş γ xəttinin mərkəzləri yoxdur, yəni bu xətt paraboladır. Baş diametr $\vec{j}$ vektoruna qoşmadır, ona görə də $2y-4=0$, və ya $y-2=0$ tənliyinə malikdir. Bu düz xətt γ parabolasını $O'\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$ nöqtəsində kəsir və bu nöqtə parabolanın təpəsidir. Koordinat sisteminin O' nöqtəsinə köçürülməsi düsturları belə yazılır: $x = X - \frac{1}{4}, y = Y + 2$. Ona görə də γ xətti $O'\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində $Y^2 + 2X = 0$ tənliyinə malikdir. Əgər absis oxunun istiqamətini dəyişsək, yəni $\vec{i}' = -\vec{i}, \vec{j}' = \vec{j}$ olmaqla yeni $O'\vec{i}'\vec{j}'$ koordinat sistemini daxil etsək, onda γ xəttinin yeni koordinat sistemindəki tənliyi $Y'^2 = 2X'$ şəklində olur. Şəkil 48-də bu parabolanın qurulması təsvir olunmuşdur.



Şəkil 48

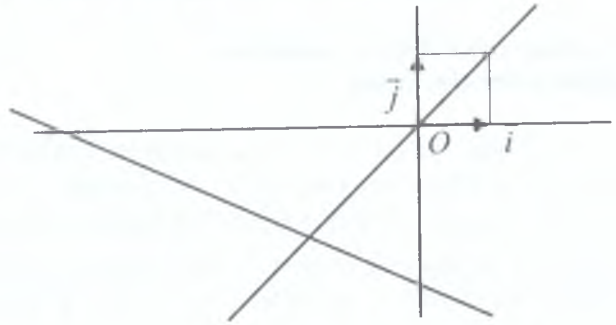
Əgər verilmiş ikitərtibli xətt düz xətlər cütünə parçalanırsa, onda bəzi hallarda xəttin tənliyini kanonik şəklə gətirmədən bu tənliyin sol tərəfini vuruqlarına ayırmaq və ikitərtibli xətti təşkil edən düz xətlərin tənliklərini tapmaq olur.

Məsələ 3. $x^2 + xy - 2y^2 + 5x - 5y = 0$ ikitərtibli xəttini düzbucaqlı koordinat sistemində qurun.

Həlli. Bu tənliyin sol tərəfini vuruqlarına ayıraq:

$$(x^2 + 2xy + 5x) - (xy + 2y^2 + 5y) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(x + 2y + 5) - y(x + 2y + 5) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - y)(x + 2y + 5) = 0.$$

Verilmiş xətt $x - y = 0, x + 2y + 5 = 0$ kəsişən düz xətlər cütünə parçalanır (şək. 49).



Şəkil 49

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y = 0$ tənliyi ilə verilən ikitərtibli xətti qurun.

2. Tənliyi $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$ şəklində verilən ikitərtibli xətti qurun.

3. Tənliyi $9x^2 - 6xy + y^2 - 4x + 8y - 9 = 0$ şəklində verilən parabolanı qurun.

4. Tənliyi $9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$ şəklində olan ikitərtibli xətti qurun.

5. Parabolanın $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 8x + 14y + 3 = 0$ tənliyini sadə şəklə gətirin.

Cavab: $y^2 = \frac{2}{\sqrt{13}}x$.

V FƏSİL

MÜSTƏVİNİN ÇEVİRMƏLƏRİ

§ 16. Çoxluqların inikası və çevirməsi. Çoxluğun çevirmələr qrupu

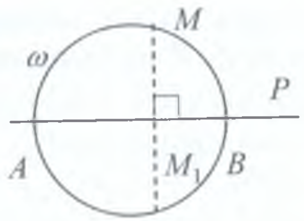
1. Tutaq ki, X və Y boş olmayan çoxluqlardır. Fərz edək ki, X çoxluğunun hər bir x elementinə Y çoxluğunun müəyyən y elementi qarşı qoyulmuşdur. Bu halda deyirlər ki, *X çoxluğunun Y çoxluğuna inikası* (və ya funksiya) verilmişdir. Bu funksiyanı bir hərflə , məsələn, f hərfi ilə işarə edir və $f:X\to Y$, və ya $X\xrightarrow{f}Y$ şəklində yazırlar. $y\in Y$ elementi f funksiyasının $x\in X$ elementi üçün *qiyməti* adlanır və $f(x)$ ilə işarə edilir. X çoxluğuna f funksiyasının *təyin oblastı* , bütün qiymətlər çoxluğuna isə bu funksiyamn *qiymətlər oblastı* deyilir. $f:X\to Y$ funksiyasının qiymətlər oblstını $f(X)$ kimi işarə edirlər. Aşkardır ki, $f(X)\subset Y$.

Həndəsə kursunda müxtəlıf təbiətli X və Y çoxluqlarına baxıldığından, daha çox «funksiya» deyil, «inikas» termini işlədilir.

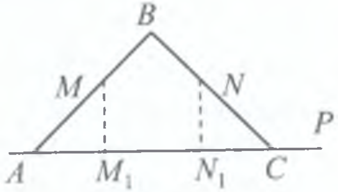
Tutaq ki, müəyyən $f:X\to Y$ inikası verilmişdir. $y=f(x)$ elementi $x\in X$ elementinin *obrazı*, x isə $y\in Y$ elementinin *proobrazı* adlanır. Həmçinin deyirlər ki, x elementi f inikasında y elementinə keçir (çevrilir) və $f:x\mapsto y$, yaxud $x\overset{f}{\mapsto}y$ yazırlar.

İnikaslara dair nümunələrə baxaq.

Nümunə 1. Tutaq ki, ω çevrədir, AB isə onun diametridir (şək. 50). Çevrənin hər bir M nöqtəsinə bu nöqtənin AB düz xətti üzərindəki ortoqonal M_1 proyeksiyasını qarşı qoyaq. Nəticədə ω çevrəsinin AB düz xəttinə $f_1:\omega\to AB$ inikası alınır.



Şəkil 50



Şəkil 51

Nümunə 2. Tutaq ki, ABC üçbucaqdır, $X-AB$ və BC parçalarının birləşməsidir, Y isə AC düz xəttinin bütün nöqtələri çoxluğudur (şək. 51). X çoxluğunun hər bir M nöqtəsinə onun AC düz xətti üzərindəki M_1 proyeksiyasını (ortoqonal) qarşı qoyaq. Nəticədə $f_2:X\to Y$ inikasını alırıq.

Nümunə 3. σ müstəvisində a düz xəttinə baxaq. Müstəvi-nin hər bir M nöqtəsinə onun a düz xətti üzərindəki M_1 proyek-siyasını qarşı qoysaq, $f_3:\sigma\to a$ inikasını alarıq.

2. Tutaq ki, $f:X\to Y$ inikası verilmişdir.

1) Əgər ixtiyari müxtəlif $x_1,x_2\in X$ elementləri üçün $f(x_1)\neq f(x_2)$ olarsa, onda deyirlər ki, f *inyektiv inikasdır*, və ya *inyeksiyadır*.

2) Əgər $f(X)=Y$ olarsa, yəni Y çoxluğunun hər bir nöqtəsi X çoxluğunun ən azı bir nöqtəsinin obrazıdırsa, onda f *X çoxluğunun Y çoxluğunun üzərinə inikası*, və ya *süryektiv inikas* (*süryeksiya*) adlanır.

3) $f:X\to Y$ inikası eyni vaxtda həm inyeksiya, həm də süryeksiya olduqda ona *X çoxluğunun Y çoxluğunun üzərinə qarşılıqlı birqiymətli inikası*, və ya *X çoxluğunun Y çoxluğunun üzərinə biyektiv inikası* (*biyeksiyası*) deyirlər.

Yuxarıdakı nümunələrdə f_1 inikası (nümunə 1) nə inyeksiya ($M\neq N$ olduqda $f(M)=f(N)$), nə də süryeksiya deyil (məsələn, AB düz xəttinin P nöqtəsinin proobrazı yoxdur). f_2

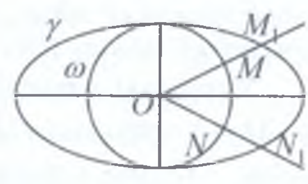
inikası (nümunə 2) inyeksiyadır (əgər $M \neq N$ olarsa, onda $f(M) \neq f(N)$), lakin süryeksiya deyil (P nöqtəsinin proobrazı yoxdur). f_3 inikası (nümunə 3) süryeksiyadır (a düz xəttinin hər bir nöqtəsinin proobrazı vardır), lakin inyeksiya deyil.

Qeyd. Yuxarıdakılardan aydın olur ki, əgər $f : X \to Y$ hər hansı inikasdırsa, onda $f_1(x) = f(x)$ qaydası ilə təyin olunan $f_1 : X \to f(X)$ inikası süryeksiyadır. Analogiyaya görə, əgər $f : X \to Y$ inikası inyeksiyadırsa, onda onda $f_1(x) = f(x)$ qaydası ilə təyin olunan $f_1 : X \to f(X)$ inikası biyeksiyadır.

4. Tutaq ki, $f : X \to Y$ biyektiv inikasdır. Hər bir $y \in Y$ elementinə elə $x \in X$ elementini qarşı qoyaq ki, $y = f(x)$ olsun. Bu qayda ilə yeni $f' : Y \to X$ ($f'(y) = x$) inikası təyin olunur. Başqa sözlə, f' inikası zamanı Y çoxluğunun ixtiyari y elementi bu elementin f inikasındakı x proobrazına çevrilir. Bu inikas adətən f^{-1} kimi işarə olunur və f *inikasının tərsi* adlanır.

Nümunəyə baxaq.

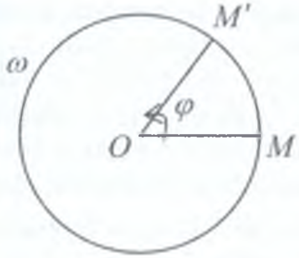
Nümunə 4. Mərkəzi O nöqtəsində olan γ ellipsinə və bu ellipslə onun kiçik oxunun uc nöqtələrində ortaq toxunanlara malik olan ω çevrəsinə baxaq (şək.52). ω çevrəsinin hər bir M nöqtəsinə OM şüasının γ ellipsi ilə M_1 kəsişmə nöqtəsini qarşı qoyaq. Nəticədə $f_4 : \omega \to \gamma$ inikasını alırıq. Aşkardır ki, f_4 inikası ω çevrəsinin γ ellipsinin üzərinə biyeksiyasıdır. Ona görə də $f^{-1} : \gamma \to \omega$ tərs inikasını qurmaq olar. Bu inikas zamanı ellipsin hər bir N_1 nöqtəsinə ON_1 şüasının ω çevrəsi ilə N kəsişmə nöqtəsi qarşı qoyulur.



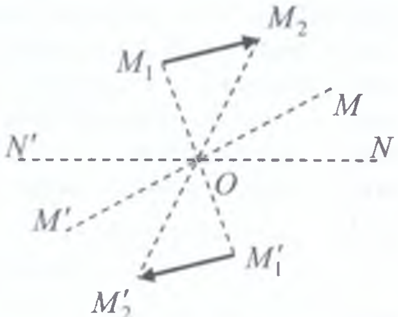
Şəkil 52

5. Əgər $f : X \to Y$ inikasında $Y = f(X) = X$ olarsa, onda deyirlər ki, *X çoxluğunun özünün özü üzərinə inikası* verilmişdir. Boş olmayan X çoxluğunun özünün özü üzərinə biyektiv inikası *X çoxluğunun çevirməsi* adlanır. Nümunələrə baxaq.

Nümunə 5. Tutaq ki, ω – oriyentasiya olunmuş müstəvi üzərində verilmiş çevrədir, φ isə $-\pi < \varphi \leq \pi$ şərtini ödəyən oriyentasiya olunmuş bucaqdır. Elə $f:\omega \to \omega$ inikasına baxaq ki, bu inikas zamanı ω çevrəsinin hər bir M nöqtəsinə həmin çevrənin $\angle MOM' = \varphi$ şərtini ödəyən M' nöqtəsi qarşı qoyulsun. (şək.53). Asanlıqla yoxlanılır ki, $f:\omega \to \omega$ inikası ω çevrəsinin çevirməsidir.



Şəkil 53



Şəkil 54

Nümunə 6. σ müstəvisi üzərində O nöqtəsini seçək və elə $f:\sigma \to \sigma$ çevirməsini təyin edək ki, bu çevirmə zamanı hər bir M nöqtəsi özünə O nöqtəsinə nəzərən simmetrik olan M' nöqtəsinə çevrilmiş olsun (şək. 54). Əgər M və N müxtəlif nöqtələrdirsə, onda onların $f(M)$ və $f(N)$ obrazları da müxtəlifdirlər, ona görə də f – inyektiv inikasdır. Digər tərəfdən, σ müs-təvisinin ixtiyari M' nöqtəsi bu müstəvinin müəyyən M nöqtəsi-nin obrazıdır, yəni f – süryeksiyadır. Beləliklə, f - σ müstəvisi-nin çevirməsidir. Bu çevirməyə *müstəvinin O nöqtəsinə nəzərən simmetriyası* (*mərkəzi simmetriya,* və ya *O nöqtəsindən əks etmə*) deyilir. O nöqtəsi *simmetriya mərkəzi* adlanır.

6. Növbəti şərhlərimiz üçün lazımlı olan qrup anlayışını daxil edək . *Qrup* elə $(G,\circ)$ cütünə deyilir ki, burada G -

üzərində aşağıdakı üç şərtin ödənilməsi ilə $\circ$ binar əməlinin (kompozisiya qanununun) verildiyi boş olmayan çoxluqdur:

1) $\circ$ assosiativ binar əməlidir, yəni ixtiyari $a,b,c \in G$ elementləri üçün: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

2) G çoxluğunda elə e elementi (neytral element) vardır ki, ixtiyari $a \in G$ elementi üçün $a \circ e = a$.

3) $\forall a \in G$ elementi üçün elə $a' \in G$ elementi (simmetrik element) vardır ki, $a \circ a' = e$.

Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi kursundan məlum olduğu kimi, qrupların öyrənilməsi zamanı binar əməlin additiv və multiplikativ yazılışlarından istifadə olunur. Həndəsədə adətən multiplikativ yazılışdan istifadə edilir və binar əməli hasil adlandırılmaqla, $a \circ b$ əvəzinə $a \cdot b$ (və ya ab) yazılır. $a \cdot b$ elementi a və b elementlərinin *hasili* adlanır. Hasil əməlinə nəzərən neytral element e hərfi ilə işarə olunur və *vahid element*, yaxud *qrupun vahidi* adlanır. a elementinə simmetrik olan a' elementi a elementinin *tərsi* adlanır və a^{-1} kimi işarə olunur.

Tutaq ki, $(G,\circ)$-qrupdur və $H \subset G, H \neq \varnothing$. Əgər $(H,\circ)$ qrupdursa, onda bu qrupa $(G,\circ)$ qrupunun *alt qrupu* deyilir.

Teorem 1. *Aşağıdakı iki şərt ödənildikdə G qrupunun boş olmayan H alt çoxluğu onun alt qrupudur:*

1) *Əgər* $a \in H$ *və* $b \in H$ *olarsa, onda* $a \circ b \in H$.

2) *Əgər* $a \in H$ *olarsa, onda* $a^{-1} \in H$.

İsbatı. 1) şərtindən alınır ki, H çoxluğu üzərində $\circ$ binar əməli təyin olunmuşdur. Bu əməl G çoxluğunun özünün üzərində assosiativ olduğundan, H çoxluğu üzərində də assosiativdir.

İsbat edək ki, G qrupunun e vahidi H çoxluğuna daxildir. Doğrudan da, tutaq ki, $a \in H$. 2) şərtinə əsasən, $a^{-1} \in H$, ona görə də $a \circ a^{-1} \in H$, və ya $e \in H$.

2) şərtindən alınır ki, ixtiyari $a \in H$ elementi üçün $a \circ a^{-1} = e$ şərtini ödəyən $a^{-1} \in H$ elementi vardır. Beləliklə,

qrupun tərifində verilən hər üç şərt ödənilir, ona görə də $(H,\circ)$ qrupdur, yəni $H-G$ qrupunun alt qrupudur. ■

7. Boş olmayan hər hansı E çoxluğuna baxaq və bu çoxluğun bütün çevirmələrinin çoxluğunu G_E ilə işarə edək. G_E çoxluğunda $\circ$ kompozisiya qanununu daxil edək. Tutaq ki, $f,g\in G_E$. E çoxluğunun hər bir x elementinə z elementini aşağıdakı qayda ilə qarşı qoyaq: $y=f(x), z=g(y)$ olarsa, onda $z=g(f(x))$. Nəticədə E çoxluğunun x elementini onun z elementinə qarşı qoyan yeni çevirmə (əvvəlcə f çevirməsinin, sonra isə g çevirməsinin ardıcıl olaraq tətbiqi nəticəsində) təyin olundu. Bu çevirmə $g\circ f$ (və ya sadəcə gf) kimi işarə olunaraq, *f və g çevirmələrinin kompozisiyası* (və ya *bu çevirmələrin hasili*) adlandırılır. Təyin olunma qaydasına görə $(gf)(x)=$ $=g(f(x))$. Beləliklə, G_E çoxluğu üzərində $\circ$ binar əməli-çevirmələrin hasili təyin olundu.

Teorem 2. *$(G_E,\circ)$ cütü qrupdur, burada $\circ$ – çevirmələrin kompozisiyasıdır.*

İsbatı. Göstərək ki, $(G_E,\circ)$ cütü qrupun tərifində verilən şərtləri ödəyir.

1) Tutaq ki, $f,g,h\in G_E, h\circ(g\circ h)=m, (h\circ g)\circ f=n$. İsbat edək ki, m və n çevirmələri üst-üstə düşürlər. Hasil əməlinin tərifinə görə, E çoxluğunun istənilən x elementi üçün yaza bilərik:

$$m(x)=h((gf)(x))=h(g(f(x))),\ n(x)=(hg)(f(x))=h(g(f(x))).$$

Beləliklə, E çoxluğunun istənilən x elementi üçün $m(x)=n(x)$. Bu isə o deməkdir ki, m və n çevirmələri üst-üstə düşürlər: $m=n$, yəni $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

2) e ilə eynilik çevirməsini, yəni E çoxluğunun hər bir elementinə həmin elementin özünün qarşı qoyulduğu çevirməni işarə edək. Aşkardır ki, istənilən $f\in G_E$ çevirməsi üçün:

$f \circ e = f$. Ona görə də $e-$çevirmələrin kompozisiyası əməlinə nəzərən neytral elementdir.

3) İstənilən $f \in G_E$ çevirməsi E çoxluğunun özünün özünə biyektiv inikası olduğundan, $f^{-1}: E \to E$ tərs inikası vardır və bu inikas E çoxluğunun çevirməsidir, ona görə də $f^{-1} \in G_E$. Aşkardır ki, $f \circ f^{-1} = e$. Doğrudan da, fərz edək ki, $y-E$ çoxluğunun ixtiyari elementidir. Əgər $f^{-1}(y) = x$ olarsa, onda $f(x) = y$. Ona görə də $(ff^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$, yəni ff^{-1} inikası e eynilik çevirməsi ilə üst-üstə düşür. ■

Nəticə. *E çoxluğunun bütün çevirmələrinin G_E qrupunda eynilik çevirməsi qrupun vahididir, f^{-1} çevirməsi isə f çevirməsinə simmetrikdir.*

G_E qrupunun istənilən alt qrupunu sadəcə olaraq. *E çoxluğunun çevirmələr qrupu* adlandırırlar. E çoxluğunun çevirmələrinin müəyyən boş olmayan H çoxluğunun çevirmələr qrupu olduğunu göstərmək üçün teorem 1-i tətbiq etmək lazımdır, yəni aşağıdakı iki şərtin ödənildiyini yoxlamaq lazımdır:

1) Əgər $f \in H, g \in H$, olarsa, onda $gh \in H$.

2) Əgər $f \in H$ olarsa, onda $f^{-1} \in H$.

8. Tutaq ki, $E-$boş olmayan çoxluqdur, G isə bu çoxluğun müəyyən çevirmələr qrupudur. Tutaq ki, G qrupunda elə çevirmə vardır ki, bu çevirmə boş olmayan $F \subset E$ çoxluğunu F' çoxluğuna çevirir. Bu halda deyirlər ki, F çoxluğu G qrupuna nəzərən F' çoxluğuna *ekvivalentdir.* F çoxluğunun F' çoxluğuna ekvivalent olduğunu belə yazırlar: $F \overset{G}{\approx} F'$. Ekvivalentlik anlayışının bəzi xassələrini qeyd edək.

1^0. *İstənilən F fiquru üçün:* $F \overset{G}{\approx} F$. Doğrudan da, E çoxluğunun e eynilik çevirməsi G qrupunun vahididir, yəni $e \in G$. Lakin $e(F) = F$, ona görə də $F \overset{G}{\approx} F$.

2^0. Əgər $F \overset{G}{\approx} F'$ olarsa, onda $F' \overset{G}{\approx} F$.

$F \overset{G}{\approx} F'$ olduğundan, elə $f \in G$ çevirməsi vardır ki, $F' = f(F)$. Lakin bu halda $f^{-1}(F') = F$, burada $f^{-1} \in G$. Beləliklə, $F' \overset{G}{\approx} F$.

3^0. Əgər $F \overset{G}{\approx} F'$, $F' \overset{G}{\approx} F''$ olarsa, onda $F \overset{G}{\approx} F''$. Doğrudan da, $F \overset{G}{\approx} F'$ olduğundan, elə $f \in G$ çevirməsi vardır ki, $F' = f(F)$. Digər tərəfdən, $F' \overset{G}{\approx} F''$ olduğuna görə, elə $g \in G$ çevirməsi vardır ki, $F'' = g(F') = g(f(F))$. Buradan görünür ki, $h = gf \in G$ çevirməsi üçün $h(F) = F''$, yəni $F' \overset{G}{\approx} F''$.

Beləliklə, *fiqurların ekvivalentliyi ekvivalentlik münasibətidir*. Əgər F və F' fiqurları G qrupuna nəzərən ekvivalentdirlərsə, onda deyirlər ki, bu fiqurlar *G – ekvivalentdirlər*.

Məsələ. Müstəvi üzərində S mərkəzli $P(S)$ düz xətlər dəstəsi və S nöqtəsindən keçməyən d düz xətti verilmişdir. $\forall M \in d$ nöqtəsi üçün $f(M) = (SM) \in P(S)$ qanunu ilə $f : d \to P(S)$ inikası təyin olunmuşdur. Göstərin ki, f inikası inyektivdir, lakin süryektiv deyil.

Həlli. $\forall M_1, M_2 \in d, M_1 \neq M_2$ nöqtələrinə baxaq. f inikası zamanı M_1 və M_2 nöqtələrinə $f(M_1), f(M_2) \in P(S)$ düz xətləri qarşı qoyular. $M_1 \neq M_2$ olduğuna görə, $f(M_1) \neq f(M_2)$ olacaqdır. Doğrudan da, əks halda $M_1 = M_2$ şərti alınardı, bu isə mümkün deyil. Beləliklə, f inikası inyeksiyadır.

Elə $d_0 \in S(P)$ düz xəttini nəzərdən keçirək ki, $d_0 \| d$ şərti ödənilsin. d və d_0 düz xətləri kəsişmirlər. Ona görə də d düz xətti üzərində obrazı d_0 düz xətti olan nöqtə yoxdur, yəni

$f(d) \subset P(S)$. Bu isə f inikasının süryeksiya olmadığını göstərir.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. Tutaq ki, l düz xətti l_1 və l_2 düz xətlərinin ($l_1 \cap l_2 = O$) əmələ gətirdiyi qarşılıqlı bucaqlar cütünün tənbölənini üzərində saxlayır. $\forall M \in \Phi = l_1 \cup l_2$ nöqtəsi üçün $f(M) = M' | M, M' \in d, d \perp l$ qanunu ilə $f : \Phi \to l$ inikası təyin olunmuşdur. Gəstərin ki, f inikası süryeksiyadır, lakin inyeksiya deyil.

2. İsbat edin ki, $\Phi = [AB] \setminus \{A, B\}$ fiqurunun (AB) düz xəttinə biyektiv f inikası vardır.

3. π müstəvisi üzərində $\Phi = \{M \mid |OM| < r\}$ açıq dairəsi verilmişdir. Göstərin ki, biyektiv $f : \Phi \to \pi$ inikası vardır.

4. Müstəvi üzərində $[AB]$ və $[CD]$ parçaları verilmişdir. İsbat edin ki, $[AB]$ parçasının $[CD]$ parçasına biyektiv f inikası vardır.

5. Müstəvi üzərində γ yarım çevrəsi və $[AB]$ parçası verilmişdir. İsbat edin ki, γ yarım çevrəsinin $[AB]$ parçasına biyektiv inikası vardır.

§ 17. Müstəvinin hərəkətləri. Hərəkətin analitik ifadəsi. Müstəvinin hərəkətlər qrupu

1. Müstəvinin elə çevirməsinə baxaq ki, bu çevirmə zamanı istənilən A və B nöqtələri arasındakı məsafə onların A' və B' obrazları arasındakı məsafəyə bərabər olsun, yəni $AB = A'B'$ şərti ödənilsin. Bu halda deyirlər ki, verilmiş çevirmə *məsafələri invariant saxlayır.*

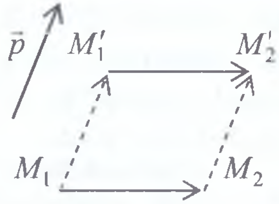
Müstəvinin məsafələri invariant saxlayan çevirməsinə *hərəkət* deyilir. Hərəkətə ən sadə nümunə müstəvinin eynilik çevirməsidir (bu çevirmədə müstəvinin hər bir nöqtəsi özünə çevrilir). Digər nümunələrə baxaq.

Nümunə 1. σ müstəvisinə paralel olan $\vec{p}$ vektorunu götürək. Hər bir $M \in \sigma$ nöqtəsinə elə $M' \in \sigma$ nöqtəsini qarşı qoyaq ki, $\overline{MM'} = \vec{p}$ olsun. Nəticədə σ müstəvisinin müəyyən $f : \sigma \to \sigma$ çevirməsini alırıq. Bu çevirməyə $\vec{p}$ vektoru qədər *paralel köçürmə* deyilir. $\vec{p}$ vektoru köçürmənin vektoru adlanır
(şəkil 55). $\vec{p} = \vec{0}$ olduqda paralel köçürmə eynilik çevirməsi olur.

Göstərək ki, *paralel köçürmə hərəkətdir.* Tutaq ki, M_1 və M_2 – müstəvinin iki nöqtəsidir, M_1' və M_2' – onların obrazlarıdır. Onda

$$\overline{M_1M_1'} = \vec{p}, \overline{M_2M_2'} = \vec{p},$$

ona görə də $\overline{M_1M_1'} = \overline{M_2M_2'}$. Bura-



Şəkil 55

dan $\overline{M_1M_2} = \overline{M_1'M_2'}$, eləcə də $M_1M_2 = M_1'M_2'$ bərabərliyi alınır (şək. 55). Beləliklə, paralel köçürmə zamanı məsafə saxlanılır, yəni, paralel köçürmə-hərəkətdir.

Nümunə 2. Müstəvinin müəyyən O nöqtəsinə nəzərən f simmetriyasını nəzərdən keçirək (bax, § 16, nümunə 6). Aşkardır ki, f simmetriyası müstəvinin çevirməsidir və məsafəni invariant saxlayır. Doğrudan da, əgər M_1 və M_2 – müstəvinin iki nöqtəsi, M_1' və M_2' – onların obrazlarıdırsa, onda $\overline{OM_1'} = -\overline{OM_1}$ və $\overline{OM_2'} = -\overline{OM_2}$, ona görə də $\overline{M_1'M_2'} = \overline{M_1M_2}$ (şək. 54). Buradan alınır ki, $M_1M_2 = M_1'M_2'$, yəni f – hərəkətdir.

2. Müstəvi üzərində bir düz xəttə aid olmayan nizamlanmış A, B, C nöqtələr üçlüyünə *reper* deyilir və $R = \{A, B, C\}$ kimi işarə olunur. A, B və C nöqtələrinə reperin *təpələri,* o cümlədən

A nöqtəsinə reperin *başlanğıcı* deyilir. ABC ixtiyari üçbucaq olduqda *R – afin reper,* A bucağı düz bucaq olduqda və $AB = AC = 1$ şərtləri ödənildikdə isə *ortonormallaşmış reper* adlanır.

Tutaq ki, müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinat sistemi verilmişdir. O nöqtəsindən $\overline{OE_1} = \vec{e}_1, \overline{OE_2} = \vec{e}_2$ vektorlarını ayırsaq, $R = \{O, E_1, E_2\}$ reperini alarıq. Bu reper $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinat sisteminə uyğun olan reper adlanır. Verilmiş koordinat sistemi
afin koordinat sistemi olduqda R – afin reper, düzbucaqlı koordinat sistemi olduqda isə ortonormallaşmış reper olur. (x, y) – M nöqtəsinin $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinat sistemində koordinatları olduqda deyirlər ki, M nöqtəsinin uyğun R reperində (x, y) koordi-natları vardır.

İsbat edək ki, *istənilən hərəkət zamanı reper reperə çevrilir, xüsusi halda, ortonormal reper –ortonormal reperə çevrilir.* Doğrudan da, fərz edək ki, $\{A, B, C\}$ – verilmiş reperdir, A', B' və C' – uyğun olaraq, A, B və C nöqtələrinin obrazlarıdır. A, B və C nöqtələri bir düz xəttə aid olmadıqlarından, $AB < AC + CB$, $BC < BA + AC$, $CA < CB + BA$. Hərəkət nöqtələr arasındakı məsafəni dəyişmir, ona görə də $A'B' < A'C' + C'B'$, $B'C' < B'A' + A'C'$, $C'A' < C'B' + B'A'$. Buradan alınır ki, A', B', C' nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşmirlər, yəni $\{A', B', C'\}$ – reperdir. Tutaq ki, $\{A, B, C\}$ – ortonormal reperdir. Onda Pifaqor teoreminə görə, $AB^2 + AC^2 = BC^2$, buradan $A'B'^2 + A'C'^2 = B'C'^2$. Beləliklə, $A'B'C'$ – düzbucaqlı üçbucaqdır. Digər tərəfdən, $A'B' = AB = 1, A'C' = AC = 1$ olduğundan, müəyyən edirik ki, $\{A', B', C'\}$ – ortonormal reperdir.

Əsas teorem adlanan teoremi isbat edək.

Teorem 1. *Tutaq ki, $R = \{A, B, C\}$ və $R' = \{A', B', C'\}$ – σ müstəvisinin ixtiyari iki reperidir. Onda R reperini R' reperinə çevirən bir və yalnız bir hərəkət vardır. Bu hərəkət zamanı R*

reperində koordinatları ilə verilmiş ixtiyari M nöqtəsi R' reperində eyni koordinatları olan M' nöqtəsinə çevrilir.

İsbatı. Əvvəlcə gəstərək ki, R reperini R' reperinə çevirən hərəkət vardır. Aşağıdakı qayda ilə $g:\sigma \to \sigma$ inikasını təyin edək. R reperində koordinatları x, y olan M nöqtəsinə R' reperində eyni x, y koordinatlarına malik olan M' nöqtəsini qarşı qoyaq. Aşkardır ki,

$$A(0,0)_R \overset{g}{\mapsto} A'(0,0)_{R'},\ B(1,0)_R \overset{g}{\mapsto} B'(1,0)_{R'},\ C(0,1)_R \overset{g}{\mapsto} C'(0,1)_{R'},$$

$g:\sigma \to \sigma$ inikası müstəvinin özünə qarşılıqlı birqiymətli inikasıdır, yəni çevirınədir. İsbat edək ki, g - məsafəni saxlayır. Doğrudan da, fərz edək ki, M_1 və M_2 müstəvinin elə iki nöqtəsidir ki, bu nöqtələrin R reperində $M_1(x_1, y_1)_R$ və $M_2(x_2, y_2)_R$ koordinatları vardır. Onda $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. M_1 və M_2 nöqtələrinin M_1' və M_2' obrazlarının R' reperində eyni $M_1'(x_1, y_1)_{R'}$, $M_2'(x_2, y_2)_{R'}$ koordinatları vardır, ona görə də $M_1'M_2' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = M_1M_2$. Beləliklə, $g - R$ reperini R' reperinə çevirən hərəkətdir.

İndi isə göstərək ki, $g - R$ reperini R' reperinə çevirən yeganə hərəkətdir. Əksini fərz edək: tutaq ki, elə f hərəkəti də vardır ki, $R' = f(R)$. Onda müstəvi üzərində ən azı bir M nöqtəsi vardır ki, bu nöqtənin g hərəkəti zamanı M_1 obrazı onun f hərəkəti zamanı M_2 obrazı ilə üst-üstə düşmür. $A \overset{g}{\mapsto} A'$ və $A \overset{f}{\mapsto} A'$ olduğundan, $AM = A'M_1, AM = A'M_2$, ona görə də $A'M_1 = A'M_2$. Bu o deməkdir ki, A' nöqtəsi M_1M_2 parçasının uclarından bərabər uzaqlıqdadır. Eyni qayda ilə göstərmək olur ki, B' və C' nöqtələri də M_1M_2 parçasının uclarından bərabər uzaqlıqda yerləşirlər. Beləliklə, A', B' və C' nöqtələri M_1M_2 parçasının orta perpendikulyarına aiddirlər, yəni bir düz xəttə aiddirlər, bu isə reperin tərifinə ziddir.■

3. Hərəkətin aşağıdakı xassələrini qeyd edə bilərik:

1^0. *Hərəkət düz xətti düz xəttə, paralel düz xətləri isə paralel düz xətlərə çevirir.*

2^0. *Hərəkət sərhəddi a düz xətti olan yarımmüstəvini sərhəddi a' düz xətti olan yarımmüstəviyə çevirir, burada a' – a düz xəttinin obrazıdır.*

Nümunə olaraq, 1^0 xassəsinin doğruluğunu isbat edək. Ortonormal R reperini seçək və verilmiş hərəkət zamanı bu reperin obrazını R' ilə işarə edək. Onda R' reperi də ortonormal reperdir. Fərz edək ki, d düz xətti R reperində $Ax + By + C = 0$ tənliyi ilə təyin olunur. Bu düz xəttin d' obrazı R' reperində eyni tənliklə təyin olunur, ona görə də düz xətdir (bax, § 7, teorem 1).

İndi isə paralel d_1 və d_2 düz xətlərinə və onların d_1' və d_2' obrazlarına baxaq. Əgər d_1' və d_2' düz xətlərinin heç olmasa bir ortaq M' nöqtəsinin olduğunu fərz etsək, onda bu nöqtənin M proobrazı həm d_1, həm də d_2 düz xətti üzərində yerləşər. Bu isə $d_1 \| d_2$ şərtinə ziddir. ■

C nöqtəsinin AB parçasını böldüyü λ nisbəti A, B və C *nöqtələrinin sadə nisbəti* adlanır və $\lambda = (AB, C)$ kimi işarə olunur.

3^0. *Hərəkət düz xəttin üç nöqtəsinin sadə nisbətini saxlayır.*

4^0. *Hərəkət AB parçasını $A'B'$ parçasına çevirir, burada A' və B' - A və B nöqtələrinin obrazlarıdır.*

5^0. *Hərəkət, bucağı ona bərabər olan bucağa çevirir.*

Nümunə olaraq, xassə 3^0 – ün doğruluğunu isbat edək. Tutaq ki, düz xəttin ixtiyari üç nöqtəsinin $A(x_1, y_1), B(x_2, y_1)$, $C(x, y)$ koordinatları vardır. Əgər $\lambda = (AB, C)$ olarsa, onda məlum düsturlara görə (bax, § 5)

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{1}$$

Əgər $R' - R$ reperinin obrazıdırsa, onda A, B, C nöqtələrinin A', B', C' obrazlarının R' reperində $A'(x_1, y_1), B'(x_2, y_1)$, $C'(x, y)$ koordinatları vardır. (1) bərabərliklərindən görünür ki, C'

nöqtəsi $A'B'$ parçasını λ nisbətində bölür, yəni $(A'B',C')=\lambda$. Buradan müəyyən edirik ki, $(AB,C)=(A'B',C')$. ■

4. Tutaq ki, $R=\{O,A,B\}$ və $R'=\{O',A',B'\}$ reperləri veril-mişdir. $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ və $\overrightarrow{O'A'},\overrightarrow{O'B'}$ bazisləri eyni oriyentasiyalı (əks oriyentasiyalı) olduqda deyirlər ki, R və R' reperlərinin oriyen-tasiyaları *eynidir* (*əksdir*).

Hər hansı R reperini özü ilə eyni oriyentasiyalı reperə çevirən hərəkət *birinci növ*, əks oriyentasiyalı reperə çevirən hərəkət isə *ikinci növ hərəkət* adlanır.

Tutaq ki, g – verilmiş hərəkətdir. Müstəvi üzərində ortonormal $R=\{O,E_1,E_2\}$ reperini götürək və istənilən M nöqtəsinin və onun M' obrazının bu reperdəki koordinatlarını uyğun olaraq (x,y) və (x',y') ilə işarə edək. x',y' koordinatlarını x,y koordinatları ilə ifadə edək, yəni g hərəkətinin R reperindəki analitik ifadəsini tapaq.

Əsas teoremə görə M' nöqtəsinin R' reperində (x,y) koordinatları vardır. Ona görə də hərəkətin analitik ifadəsi ilə bağlı məsələ düzbucaqlı koordinatların çevirməsi ilə bağlı məlum məsələyə gətirilir: M' nöqtəsinin köhnə R reperindəki (x',y'), yeni R' reperindəki (x,y) koordinatlarını bilərək, x',y' koordinatlarını x,y koordinatları ilə ifadə etmək.

İki hala baxaq.

a) g hərəkəti birinci növ hərəkətdir. Bu halda R və R' reperlərinin oriyentasiyaları eynidir, ona görə də axtarılan düsturlar aşağıdakı çevirmə düsturlarıdır (bax, § 6, (10) düsturları):

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0. \end{aligned} \tag{2}$$

b) g hərəkəti ikinci növ hərəkətdir. Bu halda isə R və R' reperləri əks oriyentasiyalara malikdirlər, ona görə də axtarılan düsturları belə yaza bilərik (bax, § 6, (12) düsturları):

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + x_0, \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + y_0. \end{aligned} \tag{3}$$

(2) və (3) düsturlarının aşağıdakı ümumi yazılış forması ilə birləşdirmək mümkündür:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha + x_0, \\ y' &= x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha + y_0, \end{aligned} \tag{4}$$

burada $g-$birinci növ hərəkət olduqda $\varepsilon = 1$, $g-$ikinci növ hərəkət olduqda isə $\varepsilon = -1$.

Aşağıdakı şərtləri ödəyən $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ matrisinə *ortoqonal matris* deyilir:

$$a_1^2 + a_2^2 = 1, b_1^2 + b_2^2 = 1, a_1b_1 + a_2b_2 = 0. \tag{5}$$

(2) və (3) düsturlarında x və y koordinatlarının əmsalları

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

ortoqonal matrislərini əmələ gətirirlər. Beləliklə, müstəvinin istənilən hərəkətinin analitik ifadəsi (4) şəklindədir, burada x və y koordinatlarının əmsallarından düzələn matris ortoqonal matrisdir. Tərs hökmü ifadə edən aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2. *Tutaq ki, ortonormal* $R = \{O, E_1, E_2\}$ *reperində analitik ifadəsi*

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + x_0, \\ y' &= a_2x + b_2y + y_0 \end{aligned} \tag{6}$$

şəklində olan f çevirməsi verilmişdir, burada $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$*-ortoqonal matrisdir. Onda $f-$hərəkətdir. Belə ki,* $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1$ *olduqda $f-$birinci növ hərəkətdir, $\delta = -1$ olduqda isə f-ikinci növ hərəkətdir.*

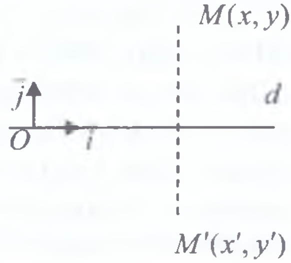
İsbatı. Tutaq ki, $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)-$ ixtiyari iki nöqtədir, $M_1'(x_1', y_1'), M_2'(x_2', y_2')$ isə bu nöqtələrin obrazlarıdır. (6) düsturlarından və (5) bərabərliklərindən istifadə etsək, alarıq:

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

və ya $M_1'M_2'^2 = M_1M_2^2$. Beləliklə, f çevirməsi məsafəni saxlayır, yəni hərəkətdir. f hərəkəti zamanı $R = \{O, E_1, E_2\}$ reperi $R' = \{O', E_1', E_2'\}$ reperinə çevrilir, burada O', E_1', E_2' təpələrinin $O'(x_0, y_0)$, $E_1'(a_1 + x_0, a_2 + y_0)$, $E_2'(b_1 + x_0, b_2 + y_0)$ koordinatları vardır. Ona görə də $\overline{O'E_1'}$ və $\overline{O'E_2'}$ vektorlarının $\overline{O'E_1'}(a_1, a_2)$ və $\overline{O'E_2'}(b_1, b_2)$ koordinatları vardır. Buradan müəyyən edirik ki, $R|R' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \delta$. Əgər $\delta = 1$ olarsa, onda R və R' eyni oriyentasiyalı reperlərdir, ona görə də f – birinci növ hərəkətdir, $\delta = -1$ olduqda isə R və R' əks oriyentasiyalı reperlər olduqlarından, f – ikinci növ hərəkət olur. ■

Teorem 2-nin köməyi ilə bu və ya digər inikasın hərəkət olub-olmadığını müəyyən etmək mümkündür. Nümunələrə baxaq.

Nümunə 3. σ müstəvisi üzərində d düz xəttini götürək və hər bir $M \in \sigma$ nöqtəsinə bu nöqtəyə d düz xəttinə nəzərən simmetrik olan M' nöqtəsini qarşı qoyaq (şək. 56). Qeyd edək ki, d düz xəttinin hər bir nöqtəsi bu düz xəttə nəzərən özünə simmetrikdir. Nəticədə σ müstəvisinin *ox simmetriyası* adlandırılan çevirməsi alınır. Göstərək ki, ox simmetriyası hərəkətdir.



Şəkil 56

Bun-dan ötrü müstəvi üzərində düzbucaqlı $O\bar{i}\bar{j}$ koordinat sistemini şək.57-də olduğu kimi daxil edək və ox simmetriyasının analitik ifadəsini tapaq. Tutaq ki, $M(x, y)$ – müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir, $M'(x', y')$ – onun obrazıdır. M və M' nöqtələri absis oxuna nəzərən simmetrik olduqlarından, $x' = x, y' = -y$. Buradan, $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$ şərti alınır. Beləliklə, teorem 1-in hökmünə əsasən, *ox simmetriyası ikinci növ hərəkətdir.*

Nümunə 4. Tutaq ki, oriyentasiya olunmuş σ müstəvisi üzərində O nöqtəsi və oriyentasiya olunmuş α bucağı verilmişdir. $g:\sigma\to\sigma$ inikasını bu şəkildə təyin edək: O nöqtəsindən fərqli olan ixtiyari M nöqtəsinə elə M' nöqtəsini qarşı qoyaq ki, $OM=OM'$ və $\angle MOM'=\alpha$ şərtləri ödənilsin, O nöqtəsinə isə bu nöqtənin özünü qarşı qoyaq. Bu inikas *müstəvinin O nöqtəsi ətrafında α bucağı qədər dönməsi* (və ya *fırlanması*) adlanır. O nöqtəsinə *dönmənin mərkəzi*, α kəmiyyətinə isə *dönmə bucağı* deyilir. Göstərmək olur ki, əgər O nöqtəsi düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sisteminin başlanğıcıdırsa, onda bu nöqtə ətrafında α bucağı qədər dönmənin analitik ifadəsi

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned} \qquad (7)$$

şəklindədir. (7) düsturlarından və teorem 2-dən müəyyən edirik ki, dönmə birinci növ hərəkətdir.

5. Göstərmək olur ki, iki hərəkətin hasili hərəkətdir. Doğrudan da, fərz edək ki, g və f – hərəkətlərdir. Bunlardan hər biri müstəvinin çevirməsi olduğundan, fg hasili müstəvinin çevirməsidir (§ 16, bənd 7). g və f hərəkətlərindən hər biri məsafələri saxladığından, fg hasili də məsafələri saxlayar. Beləliklə, fg - hərəkətdir. İxtiyari birinci növ hərəkət müstəvinin oriyentasiyasını invariant saxlayır. Ona görə də əgər g və f birinci növ hərəkətlərdirsə, onda fg hasili birinci növ hərəkətdir. Digər tərəfdən, əgər g və f ikinci növ hərəkətlər olarsa, onda bunlardan hər biri müstəvinin oriyentasiyasını dəyişir, nəticədə fg hasili birinci növ hərəkət olur.

Müstəvinin bütün hərəkətləri çoxluğunu D ilə işarə edək. Qeyd etdiyimiz kimi, əgər $g\in D, f\in D$ olarsa, onda $fg\in D$. Digər tərəfdən, əgər $g\in D$ olarsa, onda $g^{-1}\in D$. Buradan müəyyən edirik ki, D çevirmələr qrupudur (bax, § 16, bənd 7). Bu qrup *müstəvinin hərəkətlər qrupu* adlanır.

Tutaq ki, F – müəyyən fiqurdur. F fiqurunun bütün hərəkətlər zamanı saxlanılan xassələrinə bu fiqurun D qrupuna nəzərən *invariant xassələri* və ya D qrupunun *invariantları* deyilir. Məsələn, A və B nöqtələri arasındakı məsafə $\{A,B\}$ fiqurunun D qrupuna nəzərən invariant xassəsidir. Bu invariant hərəkətlər qrupunun əsas invariantıdır. Fiqurun parça, şüa, düz xətt ola bilməsi xassəsi fiqurun D qrupuna nəzərən invariant xassələrinə nümunələrdir. Bundan başqa, düz xəttin üç nöqtəsinin sadə nisbəti, bucağın ölçüsü, fiqurun sahəsi də D qrupunun invariantlarıdır.

Bütün birinci növ hərəkətlər çoxluğunu D_1 ilə işarə edək. İxtiyari birinci növ hərəkət müstəvinin oriyentasiyasını saxlayır. Buradan məlum olur ki, əgər $g,f \in D_1$ olarsa, onda $fg \in D_1$ və $g^{-1} \in D_1$. Beləliklə, $D_1 - D$ qrupunun alt qrupudur. Bu alt qrup *birinci növ hərəkətlər qrupu* adlanır. İxtiyari birinci növ hərəkət müstəvinin oriyentasiyasını dəyişmir, yəni hər hansı reperi onunla eyni oriyentasiyalı reperə çevirir. Ona görə də reperin oriyentasiyası D_1 qrupunun invariantıdır.

Qeyd. İkinci növ hərəkətlərin D_2 çoxluğu qrup təyin etmir. Doğrudan da, əgər g_1 və g_2 ikinci növ hərəkətlərdirsə, onda g_2g_1 – birinci növ hərəkətdir, yəni $g_2g_1 \notin D_2$.

Tutaq ki, F və F' fiqurları verilmişdir. Əgər $F' = g(F)$ şərtini şərtini ödəyən $g \in D$ hərəkəti vardırsa, yəni bu fiqurlar D – ekvivalentdirlərsə (bax, § 16, bənd 8), onda deyirlər ki, F və F' fiqurları *bərabərdirlər*. Bu halda $F = F'$ simvolik yazılışından istifadə olunur. Fiqurların D – ekvivalentliyi ekvivalentlik münasibəti olduğundan, aşağıdakılar doğrudur:

1) İstənilən F fiquru üçün $F = F$.

2) $F_1 = F_2 \Rightarrow F_2 = F_1$.

3) $(F_1 = F_2, F_2 = F_3) \Rightarrow F_1 = F_3$.

Məsələ 1. Düzbucaqlı koordinat sistemində $\vec{a} = (-3, 5)$ vektoru qədər paralel köçürmənin analitik ifadəsini yazın.

Həlli. Düzbucaqlı koordinat sistemində paralel köçürmənin analitik ifadəsi

$$x' = x + x_0, \quad y' = y + y_0$$

şəklindədir. Bu düsturlarda $\vec{a}$ vektorunun koordinatlarını yerinə yazaq:

$$x' = x - 3, \quad y' = y + 5.$$

Bu düsturlar $\vec{a} = (-3, 5)$ vektoru qədər paralel köçürməni ifadə edirlər.

Məsələ 2. Koordinat başlanğıcı ətrafmda $\alpha = \frac{\pi}{6}$ bucağı qədər dönmə zamanı $x - y + 1 = 0$ tənliyi ilə verilən l düz xəttinin obrazının tənliyini yazın.

Həlli. Koordinat başlanğıcı ətrafında $\alpha = \frac{\pi}{6}$ bucağı qədər dönmənin analitik ifadəsini (7) düsturlarına əsasən yazaq:

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \quad y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y.$$

Bu düsturların köməyi ilə x, y koordinatlarını x', y' koordinatları ilə ifadə edək:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y', \\ y &= -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'. \end{aligned} \tag{8}$$

x, y dəyişənlərinin (8) ifadələrini verilmiş düz xəttin tənliyində yerinə yazaq:

$$\left(\sqrt{3} + 1\right)x' + \left(1 - \sqrt{3}\right)y' + 2 = 0.$$

Bu tənlik l düz xəttinin obrazının tənliyidir.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. Düzbucaqli koordinat sistemində $\vec{a} = (-1, 4)$ vektoru qədər paralel köçürmənin analitik ifadəsini yazın.

Cavab: $x' = x - 1, y' = y + 4.$

2. $M(2, 1)$ nöqtəsi ətrafında dönmə A nöqtəsini B nöqtəsinə çevi-rir. $1)\alpha = 45^0, A(1,-2); 2)\alpha = 120^0, A(1, 1); 3)\alpha = 90^0, A(3,-1)$ olduq-da B nöqtəsinin koordinatlarını hesablayın.

Cavab: 1) $\left(2+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right)$; 2) $\left(\frac{5}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $(-2, 2)$.

3. Müstəvi koordinat başlanğıcı ətrafında α bucağı qədər döndərilmişdir, belə ki, $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = -\frac{4}{5}$. Bu dönmə zamanı $x + 2y - 3 = 0$ tənliyi ilə verilən l düz xəttinin obrazının tənliyini yazın.

Cavab: $11x' + 2y' - 15 = 0$.

4. Aşağıdakı halların hər birində dönmənin mərkəzini tapın:

1) $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1, \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 15, \\ y' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1. \end{cases}$

Cavab: 1) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$; 2) $\left(-\frac{23}{3}, 2\right)$.

§ 18. Oxşarlıq çevirməsi

1. Müstəvinin müəyyən çevirməsinin verildiyini fərz edək. Tutaq ki, elə $k > 0$ ədədi vardır ki, müstəvinin istənilən A, B nöqtələri və onların A', B' obrazları üçün $A'B' = kAB$ bərabərliyi doğrudur. Bu halda verilmiş çevirmə *oxşarlıq çevirməsi* adlanır. k ədədinə *oxşarlıq əmsalı* deyilir.

$k = 1$ olduqda oxşarlıq çevirməsi məsafəni saxlayır, yəni hərəkət olur. Beləliklə, *hərəkət-oxşarlıq çevirməsinin xüsusi halıdır.*

M_0 nöqtəsinin və həqiqi $m \neq 0$ ədədinin verildiyini fərz edək. Müstəvinin hər bir M nöqtəsinə elə M' nöqtəsini qarşı qoyaq ki,

$$\overline{M_0M'} = m\overline{M_0M} \qquad (1)$$

bərabərliyi ödənilsin. Bu inikas müstəvinin çevirməsi olub, *homotetiya* adlanır. M_0 nöqtəsinə *homotetiya mərkəzi*, m ədədinə isə *homotetiya əmsalı* deyilir. Göstərək ki, homotetiya-oxşarlıq çevirməsidir. Doğrudan da, fərz edək ki,

M_1, M_2 – müstəvinin ixtiyari nöqtələridir, M_1', M_2' – onların obrazlarıdır. (1) bərabərliyindən alarıq:

$$\overline{M_0M_1'} = m\overline{M_0M_1}, \quad \overline{M_0M_2'} = m\overline{M_0M_2},$$

ona görə də $\overline{M_1'M_2'} = m\overline{M_1M_2}$. Bu bərabərlikdən yaza bilərik:

$$\left|\overline{M_1'M_2'}\right| = |m| \cdot \left|\overline{M_1M_2}\right|, \text{ və ya } M_1M_2 = |m| M_1'M_2'.$$

Beləliklə, m əmsallı homotetiya $k = |m|$ əmsallı oxşarlıq çevirməsidir.

$m = 1$ olduqda (1) bərabərliyi $\overline{M_0M'} = \overline{M_0M}$ şəklində yazılır, yəni bu halda müstəvinin hər bir M nöqtəsi özünün obrazı ilə üst-üstə düşür. Beləliklə, $m = 1$ əmsallı homotetiya eynilik çevirməsidir. $m = -1$ olduqda isə (1) bərabərliyinin köməyi ilə müəyyən edirik ki, $m = -1$ əmsallı homotetiya mərkəzi simmetriyadır.

Ortonormal $\{O, E_1, E_2\}$ reperini elə seçək ki, O nöqtəsi homotetiya mərkəzi ilə üst-üstə düşsün. Əgər $M(x, y)$ – müstəvinin ixtiyari nöqtəsidirsə və $M'(x', y')$ – onun obrazıdırsa, onda (1) düsturundan homotetiyanın aşağıdakı analitik ifadəsini alırıq:

$$x' = mx, \quad y' = my. \tag{2}$$

2. Homotetiyanın bəzi xassələrini qeyd edək.

1^0. *$m \neq 1$ əmsallı homotetiya , homotetiya mərkəzindən keçməyən düz xətti ona paralel olan düz xəttə, homotetiya məkəzindən keçən düz xətti isə onun özünə çevirir.*

2^0. *Homotetiya üç nöqtənin sadə nisbətini saxlayır.*

Nümunə olaraq, xassə 1^0 – in doğruluğunu əsaslandıraq.

Tutaq ki, $Ax + By + C = 0$ – verilmiş l düz xəttinin tənliyidir. Bu tənlikdə x, y dəyişənlərinin (2) qiymətlərini yerinə yazsaq, düz xəttin l' obrazının tənliyini alarıq: $Ax' + By' + Cm = 0$. Bu, düz xətt tənliyidir. Əgər $C \neq 0$ olarsa, onda $l' \| l$, $C = 0$ olduqda isə l' və l düz xətləri üst-üstə düşürlər. ■

3^0. *Homotetiya bucağı ona bərabər olan bucağa çevirir.*

Doğrudan da, fərz edək ki, BAC – verilmiş bucaqdır, B', A', C' – B, A və C nöqtələrinin obrazlarıdır. Onda

$$\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{A'C'} = m\overrightarrow{AC}. \tag{3}$$

Buradan alırıq ki, $\angle B'A'C' = \angle BAC$. ■

3^0. *Homotetiya müstəvinin oriyentasiyasını invariant saxlayır.*

Xassənin doğruluğunu əsaslandıraq. Tutaq ki, (A, B, C) – ixtiyari reperdir, (A', B', C') – onun obrazıdır. (3) düsturlarından istifadə etməklə yaza bilərik: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \Big| \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = m^2 > 0$. Beləliklə, homotetiyada ixtiyari reperin və onun obrazının oriyentasiyaları eynidir, yəni homotetiya müstəvinin oriyentasiyasını dəyişmir. ■

3. Göstərmək olur ki, əgər f_1 və f_2 – uyğun olaraq, k_1 və k_2 əmsallı homotetiyalardırsa, onda $f_2 f_1$ - $k_2 k_1$ əmsallı homotetiyadır. Doğrudan da, $f_2 f_1$ hasili hər şeydən əvvəl müstəvinin çevirməsidir. İxtiyari A, B nöqtələri üçün $A' = (f_2 f_1)(A), B' = (f_2 f_1)(B)$ işarə edək. Göstərək ki, $A'B' = k_2 k_1 AB$. Əgər $A_1 = f_1(A), B_1 = f_1(B)$ olarsa, onda $A' = f_2(A_1), B' = f_2(B_1)$. Homotetiyanın tərifinə görə, $A_1 B_1 = k_1 AB$, $A'B' = k_2 A_1 B_1$. Buradan görünür ki, $A'B' = k_2 k_1 AB$.

Teorem 1. *Tutaq ki, f – k əmsallı oxşarlıq çevirməsidir, h isə k əmsallı və mərkəzi ixtiyari M_0 nöqtəsində olan homotetiyadır. Onda elə yeganə g hərəkəti vardır ki,*

$$f = gh\ . \tag{4}$$

İsbatı.

$$g = fh^{-1} \tag{5}$$

çevirməsinə baxaq. Bu çevirmə $k\left(\frac{1}{k}\right) = 1$ əmsallı homotetiyadır, yəni hərəkətdir. (5) bərabərliyindən alırıq: $gh = (fh^{-1})h$, və ya $gh = f(h^{-1}h) = f$. Beləliklə, (4) şərtini ödəyən g hərəkəti vardır.

Tutaq ki, $g_1 - f = g_1 h$ bərabərliyini ödəyən ixtiyari hərəkətdir. Buradan alırıq: $fh^{-1} = g_1$. Bu bərabərliklə (5)-i müqayisə etsək, $g_1 = g$ nəticəsinə gəlmiş olarıq. ■

Teorem 1-dən aydın olur ki, hər bir oxşarlıq çevirməsi ya müstəvinin oriyentasiyasını saxlayır, ya da onu dəyişir. Birinci halda oxşarlıq çevirməsi *birinci növ*, ikinci halda isə *ikinci növ oxşarlıq çevirməsi* adlanır.

4. Tutaq ki, $f - k$ əmsallı homotetiyadır. Düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemini seçək və $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində f çevirməsinin analitik ifadəsini təyin edək. Bundan ötrü O mərkəzli k əmsallı h homotetiyasına baxaq və teorem 1-i nəzərə alaq. Tutaq ki, $g-(4)$ bərabərliyini ödəyən hərəkətdir. $O\vec{i}\vec{j}$ koor-dinat sistemində h və g çevirmələrinin analitik ifadələrini yazaq (bax, (2) düsturu və § 17-dən olan (4) düsturu):

$$h: \begin{cases} \tilde{x} = kx, \\ \tilde{y} = ky; \end{cases} \qquad g: \begin{cases} x' = \tilde{x}\cos\alpha - \varepsilon\tilde{y}\sin\alpha + x_0, \\ y' = \tilde{x}\sin\alpha + \varepsilon\tilde{y}\cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

Beləliklə, əgər $M(x,y)$ – müstəvinin ixtiyari nöqtəsidirsə və $M'(x',y')$ – onun $f = gh$ çevirməsi zamanı obrazıdırsa, onda

$$\begin{cases} x' = kx\cos\alpha - \varepsilon ky\sin\alpha + x_0, \\ y' = kx\sin\alpha + \varepsilon ky\cos\alpha + y_0. \end{cases} \tag{6}$$

Əgər $\varepsilon = 1$ olarsa, onda f – birinci növ oxşarlıq çevirməsidir, $\varepsilon = -1$ olduqda isə f ikinci növ oxşarlıq çevirməsidir.

5. Bütün oxşarlıq çevirmələri çoxluğunu P ilə işarə edək. Qeyd etdiyimiz kimi, əgər $g \in P$ və $f \in P$ olarsa, onda $fg \in P$. Digər tərəfdən, əgər $g \in P$ olarsa, onda $g^{-1} \in P$. Beləliklə, P çoxluğu çevirmələr qrupudur. Bu qrup *müstəvinin oxşarlıq çevirmələri qrupu* adlanır. İstənilən oxşarlıq çevirməsi bucağı ona bərabər olan bucağa çevirdiyindən, bucağın ölçüsünü saxlayır. Bucaq ölçüsü oxşarlıq çevirmələri qrupunun əsas invariantıdır.

İxtiyari hərəkət oxşarlıq çevirməsi olduğundan, hərəkətlər qrupu oxşarlıq çevirmələri qrupunun alt qrupudur. Göstərmək olur ki, müstəvinin bütün ikinci növ oxşarlıq çevirmələrinin P_1 çoxluğu qrup əmələ gətirir.

Mərkəzi M_0 nöqtəsində olan bütün homotetiyalar çoxluğunu $P(M_0)$ ilə işarə edək. Əgər M_0 nöqtəsi düzbucaqlı koordinat sisteminin başlanğıcı qəbul edilərsə, onda ixtiyari $h \in P(M_0)$ homotetiyasının analitik ifadəsi (2) şəklində olar. (2) düsturlarının köməyi ilə isbat etmək olur ki, əgər $h_1, h_2 \in P(M_0)$ olarsa, onda $h_2 h_1 \in P(M_0)$ və əgər $h \in P(M_0)$ olarsa, onda $h^{-1} \in P(M_0)$. Buradan aydın olur ki, $P(M_0)$ P qrupunun alt qrupudur.

6. Tutaq ki, F və F' fiqurları verilmişdir. Əgər F fiqurunu F' fiquruna çevirən oxşarlıq çevirməsi vardırsa, onda deyir-lər ki, F və F' fiqurları P*–ekvivalentdirlər.* P–ekvivalent olan F və F' fiqurları *oxşar fiqurlar* adlanır. Bu halda $F \sim F'$ simvolik yazılışından istifadə olunur. Beləliklə, $\sim$ oxşarlıq münasibəti müstəvinin bütün fiqurları çoxluğunda ekvivalentlik münasibətidir. Əgər iki fiqur oxşardırsa, bu halda deyirlər ki, onların formaları eynidir. İxtiyari iki parça, ixtiyari iki çevrə oxşar fiqurlara nümunələrdir.

Oxşarlığın tərifindən aydın olur ki, əgər verilmiş F və F' çoxbucaqlıları üçün $F' = f(F)$ şərtini ödəyən f oxşarlıq çevirməsi vardırsa, onda bu çoxbucaqlılar oxşardırlar. Xüsusi halda, üçbucaqların oxşarlığına dair aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ *olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \tag{7}$$

bərabərliklərinin ödənilməsidir.

İsbatı. Zərurilik aşkardır, ona görə də yalnız şərtin kafiliyini isbat edək. Tutaq ki, (7) bərabərlikləri ödənilir, isbat edək ki, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Mərkəzi müəyyən O nöqtəsində yerləşən və əmsalı $k = \frac{A'B'}{AB}$ olan h homotetiyasına baxaq. Tutaq ki, $\Delta A_1B_1C_1 = h(\Delta ABC)$. $A_1B_1 = kAB$ olduğundan, $A'B' = A_1B_1$. (7) bərabərliklərinin köməyi ilə analoji qaydada müəyyən edirik: $B'C' = B_1C_1$ və $C'A' = C_1A_1$. Digər tərəfdən, $\angle A_1 = h(\angle A)$, ona görə də $\angle A_1 = \angle A$. Lakin şərtə əsasən, $\angle A' = \angle A$, ona görə də

$\angle A' = \angle A_1$. Analoji mühakimələrlə alırıq: $\angle B' = \angle B_1$, $\angle C' = \angle C_1$. Beləliklə, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A'B'C'$, və ya $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A'B'C'$. Digər tərəfdən, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Bu münasibətlərdən aydın olur ki, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. ■

Məsələ 1. Düzbucaqlı koordinat sistemində $C(-2,1)$ mərkəzli , $k=3$ əmsallı homotetiyanın analitik ifadəsini yazın.

Həlli. Mərkəzi koordinat başlanğıcı ilə üst-üstə düşən homotetiyanın analitik ifadəsi (2) şəklindədir. Ona görə də məsələnin şərtində verilən homotetiyanın analitik ifadəsi belə yazılar:

$$x' = 3x + x_0,$$
$$y' = 3y + y_0. \qquad (8)$$

Aşkardır ki, $C(-2,1)$ nöqtəsi mərkəz kimi, homotetiya zamanı invariant qalan nöqtədir. Bu fakta əsasən (8) düsturlarındakı x_0 və y_0 əmsallarını təyin edək:

$$-2 = 3\cdot(-2) + x_0 \Rightarrow x_0 = 4,$$
$$1 = 3\cdot 1 + y_0 \Rightarrow y_0 = -2.$$

Beləliklə, verilmiş homotetiyanın analitik ifadəsi

$$x' = 3x + 4,$$
$$y' = 3y - 2$$

şəklindədir.

Məsələ 2. Birinci növ oxşarlıq çevirməsi zamam $A(1,2) \rightarrow$ $\rightarrow A_1(2,0)$, $B(0,0) \rightarrow B_1(0,0)$. Bu çevirmənin analitik ifadəsini və oxşarlıq əmsalını tapın.

Həlli. Əvvəlcə oxşarliq əmsalını təyin edək. Məsələnin şərtinə görə, $A_1B_1 = k \cdot AB$. Lakin $AB = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$, $A_1B_1 = \sqrt{4} =$ $= 2$. Ona görə də, $k = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Bilirik ki, birinci növ oxşarlıq çevirməsinin analitik ifadəsi

$$\begin{cases} x' = kx\cos\alpha - ky\sin\alpha + x_0, \\ y' = kx\sin\alpha + ky\cos\alpha + y_0 \end{cases} \qquad (9)$$

şəklındədir. (9) çevirməsində məsələnin şərtində verilən nöqtələrin koordinatlarını və oxşarlıq əmsalının qiymətini nəzərə alaq:

$$2=\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot 1\cdot\cos\alpha-\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot 2\cdot\sin\alpha+x_0,$$
$$0=\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot 1\cdot\sin\alpha+\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot 2\cdot\cos\alpha+y_0,$$
$$0=\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot(-2)\cdot\cos\alpha-\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot 3\cdot\sin\alpha+x_0, \qquad (10)$$
$$0=\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot(-2)\cdot\sin\alpha+\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot 2\cdot\cos\alpha+y_0.$$

(10) sistemindən x_0 və y_0 əmsallarını yox etməklə alırıq:

$$\begin{cases} 2=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{10}}{5}\sin\alpha, \\ \cos\alpha=3\sin\alpha. \end{cases} \qquad (11)$$

(11) sistemindən təyin edirik: $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}, \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$. Bu qiymətləri (10) bərabərliklərində nəzərə almaqla x_0 və y_0 əmsallarının qiymətlərini hesablayaq: $x_0=\frac{9}{5}, y_0=-\frac{7}{5}$.

Beləliklə, verilmiş oxşarlıq çevirməsinin analitik ifadəsi

$$x'=\frac{\sqrt{10}}{5}\frac{3}{\sqrt{10}}x-\frac{\sqrt{10}}{5}\frac{1}{\sqrt{10}}y+\frac{9}{5},$$
$$y'=\frac{\sqrt{10}}{5}\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{\sqrt{10}}{5}\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{7}{5},$$

və ya

$$x'=\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}y+\frac{9}{5},$$
$$y'=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{7}{5}$$

şəklindədir.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. Oxşarlıq çevirməsi mərkəzi $O(0,0)$ nöqtəsi və dönmə bucağı $\alpha = \frac{\pi}{3}$ olan dönmə ilə $k = 5$ əmsallı homotetiyanın hasilinə bərabərdir. Oxşarlıq çevirməsinin analitik ifadəsini tapın.

Cavab: $x' = \frac{5}{2}x - \frac{5\sqrt{3}}{2}y, \quad y' = \frac{5\sqrt{3}}{2}x + \frac{5}{2}y.$

2. İkinci növ oxşarlıq çevirməsi zamanı $A(1,0) \to A'(0,1)$, $B(-2,1) \to B_1(-1,1)$. Bu çevirmənin analitik ifadəsini və oxşarlıq əmsalını tapın.

Cavab: $x' = \frac{3}{10}x - \frac{1}{10}y - \frac{3}{10}, y' = -\frac{1}{10}x - \frac{3}{10}y + \frac{11}{10}, k = \frac{1}{\sqrt{10}}.$

3. Ortonormal reperdə ABC və $A'B'C'$ üçbucaqlarının təpə nöqtələrinin

$$A(0,-3), B(4,0), C(1,-1), A'(-6,-6), B'(0,-2), C'\left(-\frac{26}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

koordinatları verilmişdir. İsbat edin ki, ABC və $A'B'C'$ üçbucaqları oxşardırlar. Oxşarlıq çevirməsinin analitik ifadəsini tapın.

Cavab: $x' = \frac{48}{25}x - \frac{14}{25}y - \frac{192}{25}, y' = \frac{14}{25}x + \frac{48}{25}y - \frac{6}{25}.$

§ 19. Afin çevirmələr. Afin çevirmələr qrupu

1. Müstəvinin *afin çevirməsi* elə çevirməyə deyilir ki, bu çevirmə zamanı bir düz xətt üzərində olmayan ixtiyari M_1, M_2 və M_3 nöqtələri bir düz xətt üzərində olmayan M_1', M_2' və M_3' çevrilmiş olsunlar və onların sadə nisbətləri saxlanılsın, yəni $(M_1M_2, M_3) = (M_1'M_2', M_3')$ bərabərliyi ödənilsin.

Oxşarlıq çevirməsi zamanı düz xətt düz xəttə çevrildiyindən və üç nöqtənin sadə nisbəti saxlandığından (bax, § 18, bənd 2), *istənilən oxşarlıq çevirməsi afin çevirmədir.* Ona görə də istənilən hərəkət və eləcə də xüsusi hal kimi eynilik çevirməsi afin çevirmədir.

Teorem 1. *Əgər f_1 və f_2 afin çevirmələri A və B nöqtələrini uyğun olaraq, A' və B' nöqtələrinə çevirirlərsə, onda $f_1(M) = f_2(M)$, burada $M - AB$ düz xəttinin ixtiyari nöqtəsidir.*

İsbatı. Tutaq ki, $M - AB$ düz xəttinin A və B nöqtələrindən fərqli olan ixtiyari nöqtəsidir. $M' = f_1(M), M'' = f_2(M)$ işarə edək. Göstərək ki, M' və M'' nöqtələri üst-üstə düşürlər.

f_1 və f_2 – afin çevirmələr olduqlarından, $(AB, M) = (A'B', M')$, $(AB, M) = (A'B', M'')$, ona görə də $(A'B', M') = (A'B', M'')$. Buradan alınır ki, M' və M'' nöqtələri üst-üstə düşürlər, yəni $f_1(M) = f_2(M)$. ■

Teorem 2. *Tutaq ki, $R = \{A, B, C\}$ və $R' = \{A', B', C'\}$ – müstəvinin ixtiyari reperləridir. Onda R reperini R' reperinə çevirən bir və yalnız bir afin çevirmə vardır. Bu afin çevirmə zamanı R reperindəki koordinatları ilə verilən istənilən M nöqtəsi R' reperində eyni koordinatları olan M' nöqtəsinə çevrilir.*

İsbatı. Əvvəlcə göstərək ki, R reperini R' reperinə çevirən afin çevirmə vardır. Aşağıdakı qayda ilə müstəvinin f çevirməsi-ni təyin edək. R reperində koordinatları (x, y) olan ixtiyari M nöqtəsinə R' reperində eyni koordinatlara malik olan M' nöqtəsini qarşı qoyaq. Aşkardır ki, f -müstəvinin çevirməsi olub, R reperini R' reperinə çevirir (bax, § 17, teorem 1-in isbatı).

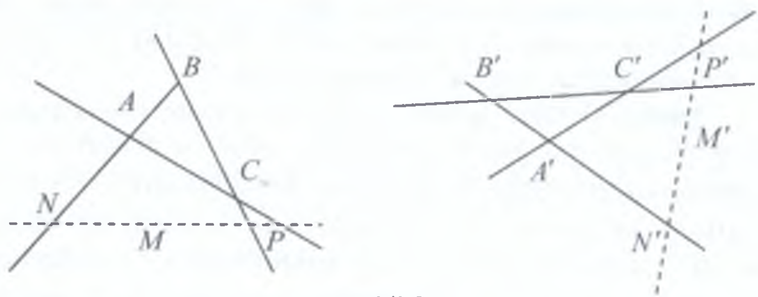
f çevirməsinin afin çevirmə olduğunu əsaslandıraq. Tutaq ki, M_1, M_2 və M bir düz xəttin ixtiyari üç nöqtəsi olub, R reperində $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ və $M(x, y)$ koordinatlarına malikdirlər. Bu nöqtələrin obrazlarının R' reperində $M_1'(x_1, y_1)$, $M_2'(x_2, y_2)$ və $M'(x, y)$ koordinatları vardır. Əgər $\lambda = (M_1 M_2, M)$ işarə etsək, yaza bilərik:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{1}$$

(1) bərabərlikləri göstərir ki, M' nöqtəsi $M_1' M_2'$ parçasını λ nisbətində bölür, yəni $(M_1' M_2', M') = \lambda$. Beləliklə, M_1', M_2' və

M' nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşirlər və $(M_1M_2,M) =$
$= (M_1'M_2',M')$.

İndi isə isbat edək ki, əgər $f_1 - R$ reperini R' reperinə çevirən hər hansı afin çevirmədirsə, onda f_1 - f afin çevirməsi ilə üst-üstə düşür. Tutaq ki, M – müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir. Bu nöqtədən elə düz xətt keçirək ki, AB, BC və AC düz xətlərindən hər hansı ikisini müxtəlif N və P nöqtələrində kəssin (şək. 57). Teorem 1-ə görə, $f(N) = f_1(N), f(P) = f_1(P)$. Buradan teorem 1 -in bir daha tətbiqi nəticəsində alırıq: $f(M) = f_1(M)$. Beləliklə, f və f_1 çevirmələri üst-üstə düşürlər, yəni $f - R$ reperini R' reperinə çevirən elə yeganə afin çevirmədir ki, bu çevirmə zamanı $M(x,y)_R$ nöqtəsi $M'(x,y)_{R'}$ nöqtəsinə çevrilir. ■



Şəkil 57

2. İsbat edək ki, *istənilən f afin çevirməsi reperi reperə çevirir.* Tutaq ki, $R = \{A,B,C\}$ ixtiyari reperdir, $A' = f(A)$, $B' = f(B), C' = f(C)$. AB düz xətti üzərində olmayan elə M nöqtəsinə baxaq ki, $M' = f(M)$ nöqtəsi $A'B'$ düz xəttinə aid olmasın. Tutaq ki, C nöqtəsinin $\{A,B,M\}$ reperində (x_0, y_0) koordinatları vardır. Teorem 2-yə görə C' nöqtəsinin $\{A',B',M'\}$ reperində eyni (x_0, y_0) koordinatları vardır. Lakin $C \notin AB$ olduğundan, $y_0 \neq 0$. Ona görə də C' nöqtəsi $A'B'$ düz xətti üzərində yerləşmir, yəni $\{A',B',C'\}$ reperdir.

Teorem 2-nin köməyi ilə isbat etmək olur ki, *afin çevirmə düz xətti düz xəttə, paralel düz xətləri paralel düz xətlərə, yarım-*

müstəvini yarımmüstəviyə, şüanı şüaya, parçanı parçaya, bucağı isə bucağa çevirir.

Bundan başqa, hərəkət çevirməsində olduğu kimi, *ixtiyari afin çevirmə ya müstəvinin oriyentasiyasını saxlayır, ya da onu dəyişir.*

Müstəvinin oriyentasiyasını dəyişməyən afin çevirməyə *birinci növ*, onu dəyişən afin çevirməyə isə *ikinci növ afin çevirmə* deyilir.

3. Müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemini seçək və verilmiş f afin çevirməsinin analitik ifadəsini təyin edək, yəni $M'(x',y')$ nöqtəsinin koordinatlarını onun $M(x,y)$ proobrazının koordinatları ilə ifadə edək. Bu məsələnin həlli üçün $R=\{O,E_1,E_2\}$ reperinə və onun $R'=\{O',E_1',E_2'\}$ obrazına baxaq, burada $\overrightarrow{OE_1}=\vec{e}_1, \overrightarrow{OE_2}=\vec{e}_2$. f afin çevirməsi verildiyindən, R' reperinin, yəni $O'(x_0,y_0)$ nöqtəsinin və $\overline{O'E_1'}(c_{11},c_{21}), \overline{O'E_2'}(c_{12},c_{22})$ koordinat vektorlarının R reperindəki koordinatlarının da verildiyini fərz edirik.

M' nöqtəsinin R reperində (x',y') koordinatları, R' reperində isə teorem 2-yə görə (x,y) koordinatları vardır. Beləliklə, M' nöqtəsinin köhnə reperdəki (x',y') koordinatlarını bu nöqtənin yeni R' reperindəki (x,y) koordinatları ilə ifadə etmək lazımdır. § 6-dakı (6) çevirmə düsturlarına əsasən yaza bilərik:

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + x_0, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + y_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Əgər f – birinci növ afin çevirmədirsə, onda R və R' eyni oriyentasiyalı reperlərdir, ona görə də $\delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0$. f ikinci növ afin çevirmə olduqda isə $\delta < 0$ şərti ödənilir. Beləliklə, müstəvinin ixtiyari afin çevirməsinin analitik ifadəsi (2) şəklindədir.

4. Müstəvinin bütün afin çevirmələri çoxluğunu A ilə işarə edək. Göstərək ki, əgər $f_1 \in A, f_2 \in A$ olarsa, onda

$f_2 f_1 \in \mathrm{A}$. Doğrudan da, f_1 və f_2 çevirmələr olduqlarına görə, $f_2 f_1$-çevirmədir. f_1 və f_2 çevirmələrindən hər biri bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtəni bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtəyə çevirir və onların sadə nisbətini invariant saxlayır, ona görə də $f_2 f_1$ çevirməsi də eyni xassələrə malikdir, yəni afin çevirmədir. Beləliklə, $f_2 f_1 \in \mathrm{A}$.

İndi isə göstərək ki, əgər $f \in \mathrm{A}$ olarsa, onda $f^{-1} \in \mathrm{A}$ Doğrudan da, əgər A, B və C nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşirlərsə, onda onların $A' = f^{-1}(A), B' = f^{-1}(B), C' = f^{-1}(C)$ obrazları da bir düz xətt üzərində yerləşirlər. Aşkardır ki, f^{-1} çevirməsi üç nöqtənin sadə nisbətini saxlayır.

Beləlıklə, müstəvinin bütün afin çevirmələrinin A çoxluğu çevirmələrin hasili (kompozisiyası) əməlinə görə qrupdur. Bu qrup *müstəvinin afin çevirmələri qrupu* adlanır. Üç nöqtənin sadə nisbəti afin çevirmələr qrupunun əsas invariantıdır.

Müstəvinin P oxşarlıq çevirmələri qrupu A qrupunun alt qrupudur. Bütün hərəkətlərin D qrupu da A qrupunun alt qru-pudur. Göstərmək olur ki, bütün birinci növ afin çevirmələrin A_1 çoxluğu A qrupunun alt qrupudur.

Tutaq ki, müstəvi üzərində F və F' fiqurları verilmişdir. Əgər F fiqurunu F' fiquruna çevirən afin çevirmə vardırsa, onda deyirlər ki, bu fiqurlar *afin-ekvivalntdirlər*, və ya A – *ekvivalentdirlər*. Teorem 2-dən alınır ki, *istənilən iki üçbucaq bir-biri ilə afin-ekvivalentdirlər.*

Məsələ 1. $A(1,2), B(3,-1), C(-1,1)$ nöqtələrini uyğun olaraq $A'(-1,10), B'(6,6), C'(-4,6)$ nöqtələrlnə çevirən afin çevirmənin analitik ifadəsini tapın.

Həlli. İstənilən afin çevirmənin analitik ifadəsi (2) şəklində olduğundan, məsələnin şərtinə görə aşağıdakıları yaza bilərik:

$$-1 = c_{11} + 2c_{12} + x_0, \qquad 6 = 3c_{11} - c_{12} + x_0,$$

$$10 = c_{21} + 2c_{22} + y_0, \qquad 6 = 3_{21} - c_{22} + y_0,$$

$$-4 = -c_{11} + c_{12} + x_0,$$

$$6 = -c_{21} + c_{22} + y_0.$$

Bu tənliklərdən x_0 və y_0 əmsallarını yox etməklə alarıq:

$$7=2c_{11}-3c_{12}, \qquad 4=-2c_{21}+3c_{22},$$
$$3=2c_{11}+c_{12}, \qquad 4=2c_{21}+c_{22},$$

və ya

$$c_{11}=2, c_{12}=-1, c_{21}=1, c_{22}=2.$$

Bu qiymətlərə əsasən, x_0 və y_0 əmsallarını tapırıq:

$$x_0=-1, y_0=5.$$

Beləliklə, verilmiş afin çevirmənin analitik ifadəsi

$$x'=2x-y-1,$$
$$y'=x+2y+5$$

şəklindədir.

Məsələ 2. Afin çevirmənin analitik ifadəsi verilmişdir: $x'=x-3y+2, y'=2x+y-3$. Bu çevirmə zamanı $7x+7y+2=0$ düz xəttinin obrazını tapın.

Həlli. Verilmiş afin çevirmənin analitik ifadəsinə əsasən, x,y koordinatlarını x',y' koordinatları ilə ifadə edək:

$$x=\frac{1}{7}x'+\frac{3}{7}y'+7, y=-\frac{2}{7}x'+\frac{1}{7}y'+1.$$

Bu düsturları verilmiş düz xəttin tənliyində nəzərə alaq:

$$7\left(\frac{1}{7}x'+\frac{3}{7}y'+7\right)+7\left(-\frac{2}{7}x'+\frac{1}{7}y'+1\right)+2=0,$$

və ya

$$-x'+4y'+16=0.$$

Beləliklə, verilmiş düz xəttin obrazının tənliyi $-x'+4y'+16=0$, və ya $x'-4y'-16=0$ şəklindədir.

Sərbəst həll etmək üçün məsələlər

1. $A(-1,2), B(2,1), C(1,-1)$ nöqtələrini uyğun olaraq $A'(-3,0), B'(6,2), C'(10,-1)$ nöqtələrinə çevirən afin çevirmənin invariant nöqtələrini tapın.

Cavab: $(1, 2)$.

2. Afin çevirmənin analitik ifadəsi verilmişdir: $x' = 2x - y + 1, y' = x + 3y$. Bu çevirmə zamanı $M_1(-1,2)$ nöqtəsinin obrazını, $M_2'(2,4)$ nöqtəsinin proobrazını tapın.

Cavab: $M_1'(-3,5), M_2(1,1)$.

3. Afin çevirmənin analitik ifadəsi verilmişdir: $x' = x - 3y + 2, y' = 2x + y - 3$. Bu çevirmə zamam $2x + y - 2 = 0$ düz xəttinin obrazını və $4x' + 9y' - 14 = 0$ düz xəttinin proobrazını tapın.

Cavab: $y' + 13 = 0,\ 22x - 3y - 33 = 0$.

ƏDƏBİYYAT

1. M.Ə.Cavadov. Vektor hesabı. Bakı, 1957.
2. S.S.Qasımova. Analitik həndəsədən mühazirələr. Dərs vəsaiti, Bakı, 2006.
3. N.T.Abbasov, B.H.Salayeva, A.A.Səlimov. Tenzor hesabı və onun tətbiqi. I, II hissələr. Bakı, 1985, 1988.
4. V.Ə.Qasımov. Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi. I hissə. Bakı, 1998.
5. П.С.Александров. Аналитическая геометрия. Учебное пособие, Москва, 1968.
6. М.М.Постников. Аналитическая геометрия. Изд-во «Наука», Москва, 1973.
7. V.Ə.Qasımov, H.D.Fəttayev, G.Z.Quliyeva. «Analitik həndəsə» fənninin proqramı. BDU nəş-tı, Bakı, 2008.
8. H.D.Fəttayev. Tenzor hesabına dair məsələlər. I hissə. Bakı, 2001.
9. В.Т.Базылев, К.И.Дуничев, В.П.Иваницкая. Геометрия, ч.1. Москва, Просвещение, 1974.
10. X.X.Paşayev, A.M.Nəcəfov. Analitik həndəsədən mühazirələr. Dərs vəsaiti, Bakı, 2002.
11. N.L.Nəsrullayev. Həndəsə məsələləri. Bakı, «Maarif» nəş-tı, 2004.
12. M.S.Mustafayev. İkitərtibli xətt və səthlərin ümumi nəzəriyyəsi. Dərs vəsaiti, Bakı, 1971.
13. S.S.Qasımova. Qiyabiçi tələbələr üçün «Analitik həndəsə» fənninə dair metodik göstərişlər. BDU nəş-tı, Bakı, 2002.
14. А.В.Погорелов. Аналитическая геометрия. Москва, Наука, 1968.
15. П.С.Моденов. Аналитическая геометрия. Учебник, Москва, Изд-во МГУ, 1969.
16. О.Н.Цубербиллер. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Москва, 1966.
17. Д.В.Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва, 1972.
18. В.Т.Базылев, К.И.Дуничев, В.П.Иваницкая и др. Сборник задач по геометрии. Москва, Просвещение, 1980.

TERMİNLƏR GÖSTƏRİCİSİ

Afin koordinat sistemi, 37
asimptotik istiqamət, 103
adi nöqtə, 110
alt qrup, 142
afin reper, 147
afin çevirmə, 164
afin çevirmələr qrupu, 168
afin-ekvivalent fiqurlar, 168

Bazis vektorları, 26
baş istiqamət, 121
__ diametr, 122
biyektiv inikas (biyeksiya), 140
birinci növ hərəkət, 151
______ hərəkətlər qrupu, 155,
bərabər fiqurlar, 155
birinci növ oxşarlıq çevirməsi, 159
______ afin çevirmə, 166

Cəbri xətt, 99

Çevirmə düsturları, 48
çoxluğun çevirməsi, 141
çevirmələrin kompozisiyası (hasili), 143
çevirmələr qrupu, 144

Düzbucaqlı dekart koordinat sistemi, 39
düz xəttin bucaq əmsalı, 56
__________ əmsallı tənliyi, 57
düz xəttin parametrik tənlikləri, 58
______ümumi tənliyi, 59
düz xəttə perpendikulyar olan vektor, 66
dönmə bucağı, 153

Eyni istiqamətlənmiş parçalar, 7
ekvipolent parçalar, 7
ellips, 75
ellipsin fokusları, 75
____ fokal radiusları, 75

ellipsin kanonik tənliyi, 76
____ fokal simmetriya oxu, 77
____ ikinci simmetriya oxu, 78
____ böyük (kiçik) oxu, 78
ellipsin böyük (kiçik) yarımoxu, 78
____ eksentrisiteti, 79
____ direktrisləri, 79
elliptik tip ikitərtibli xətlər, 105
ekvivalent çoxluqlar, 144

Əks istiqamətlənmiş parçalar, 7
___ vektor, 9

Fokal parametr, 96
funksiya, 138
funksiyanın təyin oblastı, 138
________ qiymətlər oblastı, 138

Hiperbola, 82
hiperbolanın fokusları, 82
________ fokal məsafəsi, 82
____________ radiusları, 82
hiperbolanın kanonik tənliyi, 84
_________ mərkəzi, 84
_________ birinci (fokal) sitmmetriya oxu, 84
_________ ikinci (xəyali) simmetriya oxu, 84
_________ təpələri, 85
_________ həqiqi (xəyali) yarım oxu, 85
_________ asimptotları, 86
_________ eksentrisiteti, 87
_________ direktrisləri, 92
həqiqi (xəyali) nöqtələr, 99
hiperbolik tip ikitərtibli xətlər, 105
hərəkətlər qrupu, 154
______ qrupunun invariariantları, 154
homotetiya, 157
________ mərkəzi, 157
________ əmsalı, 157

Xətti asılı olan vektorlar sistemi, 19
______ olmayan vektorlar sistemi, 19

xəttin tərtibi, 99
xəyali ellips, 128

İstiqamətlənmiş parça, 7
__________parçanın uzunluğu, 7
iki vektor arasında qalan bucaq, 31
__ vektorun skalyar hasili, 31
istiqamətlənmiş bucaq, 45
iki düz xətt arasındakı istiqamətlənmiş bucaq, 68
ikitərtibli xəttin mərkəzi, 108
______xəttə toxunan, 111
______ xəttin xarakteristik tənliyi, 131
inikas, 138
inyektiv inikas (inyeksiya), 139
ikinci növ hərəkət, 151
______ oxşarlıq çevirməsi, 159
______ afin çevirmə, 166

Kollinear vektorlar, 9
komplanar_____, 17
koordinat vektorları, 37
______ oxları, 38
keçid matrisi, 41
keçid matrisinin determinantı, 41
kompleks-qoşma nöqtələr, 99

Qarşılıqlı perpendikulyar vektorlar, 31
qeyri-mərkəzi ikitərtibli xətt, 111
qoşma diametrlər, 120
____ istiqamətlər, 120
qrup, 141
qrupun vahidi, 142

Mərkəzi ikitərtibli xətt, 110
məxsusi nöqtə, 110
mərkəzi simmetriya, 141
müstəvinin hərəkətləri, 146
______ dönməsi (fırlanması), 153

Nöqtədən vektorun ayrılması, 9
______ düz xəttə qədər olan məsafə, 67

Ortonormallaşdırılmış bazis, 27
oriyentasiya olunmuş müstəvi, 43
obraz, 138
ortonormallaşdırılmış reper, 147
ortoqonal matris, 151
ox simmetriyası, 153
oxşarlıq çevirməsi, 157
_ _ _ _ _ əmsalı, 157
_ _ _ _ _ çevirmələri qrupu, 160
oxşar fiqurlar, 161

Paraleloqram qaydası, 10
polyar koordinat sistemi, 50
polyus, 50
polyara, 50
polyar koordinatlar, 51
parabola, 90
parabolanı fokusu, 90
_ _ _ _ _ _ _direktrisi, 90
_ _ _ _ _ _ _ kanonik tənliyi, 91
_ _ _ _ _ _ _ təpəsi, 91
parabolik tip ikitərtibli xətlər, 105
proobraz, 138
paralel köçürmə, 146

Radius-vektor, 38
reper, 147
reperin təpələri, 147

Sıfır istiqamətlənmiş parça, 7
sərbəst vektor, 9
sağ (sol) bazislər, 43
simmetrik element, 142
sadə nisbət, 150

Üçbucaq qaydası, 10

Vektor, 8
vektorun düz xəttə paralelliyi, 9
_ _ _ _ _ _uzunluğu, 9

vektorların fərqi, 12
vektorun ədədə hasili, 12
– – – – – –müstəviyə paralelliyi, 16
vektorların xətti kombinasiyası, 18
vektor fəza, 25
– – – – fəzanın bazisi, 25
vektor fəzanın ölçüsü, 25
vektorun bazis üzrə ayrılışı, 26
– – – – – –bazisdəki koordinatları, 26
– – – – – – skalyar kvadratı, 32
– – – – – – yönəldici kosinusları, 34
vektor alt fəzası, 37
– – – – – – fəzasının bazisi, 37
– – – – – – – – – – – –ölçüsü, 37
– – – – – – – – – – – – oriyentasiyası, 44

Yönəldici vektor, 55

M Ü N D Ə R İ C A T

Ön söz 3

Elmi Redaktordan 5

I fəsil. Vektorlar 7
§ 1. Vektor anlayışı. Vektorların toplanması, vektorun ədədə vurulması 7
§ 2. Vektorların xətti asılılığı 16
§ 3. Vektor fəza. Vektorun koordinatları 23
§ 4. Vektorların skalyar hasili 31

II fəsil. Müstəvi üzərində koordinat metodu 37
§ 5. Müstəvi üzərində afin koordinat sistemi. Düzbucaqlı dekart koordinat sistemi. Müstəvinin oriyentasiyası 37
§ 6. Koordinatların çevirmə düsturları. Polyar koordinatlar 45

III fəsil. Müstəvi üzərində düz xətt 55
§ 7. Müstəvi üzərində düz xətt tənlikləri. Düz xəttin ümumi tənliyi. Düz xəttə nəzərən yarımmüstəvilər 55
§ 8. İki düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti. Nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə. İki düz xətt arasında qalan bucaq 64

IV fəsil. İkitərtibli xətlər 75
§ 9. Ellips 75
§ 10. Hiperbola 82
§ 11. Parabola. Ellips, hiperbola və parabolanın polyar koordinatlarla tənliyi 90
§ 12. İkitərtibli xəttin ümumi tənliyi. İkitərtibli xəttin düz xətlə qarşılıqlı vəziyyəti. Asimptotik istiqamətlər 99
§ 13. İkitərtibli xəttin mərkəzi. İkitərtibli xəttə toxunan düz xətt 107
§ 14. İkitərtibli xəttin diametrləri. Baş istiqamətlər

və baş diametrlər 117
§ 15. İkitərtibli xətlərin təsnifatı. İkitərtibli xəttin tənliyinin kanonik şəklə gətirilməsi və onun nöqtələrinin qurulması 127

V fəsil. Müstəvinin çevirmələri 138
§ 16. Çoxluqların inikası və çevirməsi. Çoxluğun çevirmələr qrupu.. 138
§ 17. Müstəvinin hərəkətləri. Hərəkətin analitik ifadəsi. Müstəvinin hərəkətlər qrupu 146
§ 18. Oxşarlıq çevirməsi 157
§ 19. Afin çevirmələr. Afin çevirmələr qrupu 164

Ədəbiyyat 171
Terminlər göstəricisi... 172

Habil Dövlət oğlu Fəttayev

ANALİTİK HƏNDƏSƏ KURSU. I HİSSƏ
(dərs vəsaiti)

Naşir: Rayiq Xan-Sayad oğlu
Kompüterdə yığdı: İradə Əhmədova
Texniki redaktor: Ülvi Novruzov
Dizayner: Ceyhun Əliyev

Yığılmağa verilib: 10.08.2009
Çapa imzalanıb: 10.09.2009
Ş.ç.v. 11.25, tiraj 200
«MBM-R» MMC-nin mətbəəsində
ofset üsulu ilə çap edilmişdir.